UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté d’éducation

Par Martin Baril

Essai présenté à la Faculté d’éducation
en vue de l’obtention du grade de
Maître en éducation, M.Ed.
Maîtrise en enseignement au secondaire (chemin qualifiant)

Décembre 2014

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

Dans le présent document, le masculin est utilisé sans aucune discrimination et dans le seul but d'alléger le texte.

INTRODUCTION

En septembre 2000, le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport amorce la réforme de l'ensemble de ses programmes de formation pour les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Cette réforme s'articule autour du développement de compétences transversales et disciplinaires. Elle propose des programmes qui se caractérisent par des trajectoires continues entre les deux ordres d'enseignement et elle s'inscrit dans un paradigme d'apprentissage d'orientations constructiviste et socioconstructiviste. L'objectif ciblé par la réforme des programmes est la réussite pour tous les élèves.

Quelques années après la mise en place de cette réforme, le rapport *Savoir pour pouvoir : Entreprendre un chantier national pour la persévérance scolaire*, présidé par Jacques Ménard de BMO Groupe financier, présente un sombre constat sur l'atteinte de l'objectif central de notre système d'éducation réformé.

> Force est de constater qu'au Québec, nous sommes encore loin du compte. Malgré tous les efforts déployés et toutes les ressources consacrées au soutien à la persévérance scolaire, notre système d'éducation échappe, bon an mal an, presque un jeune sur trois; 30 pour cent[1] de nos jeunes célèbrent leur 20e anniversaire sans avoir obtenu un DES ou un DEP. (Ménard & al., 2009)

Pour la mathématique, plusieurs élèves du secondaire semblent encore éprouver des difficultés en algèbre (Oliveira & Câmara, 2010). Dans un contexte de programmes réformés, ces constats sur le taux de diplomation chez les jeunes de moins de 20 ans et les difficultés en algèbre de nos élèves nous mènent à nous fixer comme objectif de construire une synthèse des écrits scientifiques portant sur les difficultés reliées au passage de la pensée arithmétique vers la pensée algébrique, sur les propositions didactiques favorisant ce passage ainsi que sur les moyens pour soutenir la mise en œuvre des propositions didactiques.

Au chapitre 1, nous débutons par la présentation de la problématique qui est à l'origine de cet essai. Il est question du contexte dans lequel se situe le problème pour la mathématique ainsi que des causes possibles qui en sont à l'origine. Le chapitre 1 se

[1] Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

termine par la formulation des questions de recherche. Le second chapitre présente le cadre conceptuel. Nous y présentons la définition de l'algèbre que nous retenons. Nous expliquons aussi ce qui caractérise les raisonnements arithmétique et algébrique ainsi que ce qu'est la pensée algébrique et ses composantes. Nous terminons ce chapitre en expliquant ce qu'est la genèse documentaire communautaire dans un contexte de développement professionnel. Le chapitre 3 présente la méthodologie de recherche. Dans ce chapitre, nous présentons la démarche retenue pour la constitution du corpus de textes et la méthode d'analyse. Cette dernière nous permet de définir l'angle d'analyse des textes retenus. La présentation des résultats de recherche fait l'objet du quatrième chapitre. Dans ce chapitre, nous traitons successivement chaque question de recherche en dégageant des facteurs récurrents liés à la problématique et en présentant des propositions didactiques conformes à la trajectoire continue du Programme de formation de l'école québécoise. Les résultats de notre recherche sont présentés dans un contexte de développement professionnel des enseignants des ordres d'enseignement primaire et secondaire.

Une conclusion termine ce travail de recherche. Nous y expliquons comment cette recherche peut contribuer à résoudre la problématique et nous présentons une réflexion métacognitive sur l'apport de cet essai à notre propre développement professionnel.

Chapitre 1
PROBLÉMATIQUE

L'intention de ce chapitre est de contextualiser la problématique et de présenter les causes que nous croyons être à l'origine du problème. Dans ce chapitre, la réforme des programmes d'enseignement pour la mathématique est présentée dans une perspective de transition d'ordre d'enseignement. C'est à partir de cet angle que nous identifions les causes possibles à l'origine du problème. Selon nous, il s'agirait de deux composantes appartenant respectivement au curriculum souhaité et au curriculum enseigné. Les concepts de curriculums souhaité et enseigné sont définis à la deuxième section de ce chapitre.

1.1 Contexte dans lequel se pose le problème

Les programmes réformés du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport sont construits pour soutenir le développement continu des compétences disciplinaires entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Plus particulièrement pour la mathématique, cette continuité peut s'observer en comprenant le sens des libellés de la deuxième compétence disciplinaire.

Pour l'ordre d'enseignement primaire, ce libellé est : *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*. À ce niveau, l'élève apprend à construire et à mobiliser des réseaux de concepts et de processus mathématiques. Il sait les appliquer à des situations afin de justifier des actions et des énoncés. À l'ordre d'enseignement secondaire, le libellé devient : *Déployer un raisonnement mathématique*. Selon le Programme de formation de l'école québécoise : « Déployer un raisonnement mathématique consiste à formuler des conjectures, à critiquer, à justifier ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques. » (MELS, 2006a, p.242). L'ensemble organisé des savoirs mathématiques se construit progressivement et il est l'axe autour duquel se développe la deuxième compétence disciplinaire de l'élève.

À l'ordre d'enseignement primaire, l'élève développe le sens des opérations sur les nombres. Il apprend à opérer les nombres en contexte. Par exemple, il peut opérer des nombres dans le but de calculer un pourcentage. À ce niveau, l'élève doit être en mesure de justifier le choix des concepts qu'il utilise. À la fin du 3e cycle du primaire, dans le cas du calcul d'un pourcentage, l'élève est en mesure de justifier, à l'aide d'exemples numériques, s'il est plus avantageux pour un client d'appliquer un rabais en pourcentage avant ou après le calcul d'une taxe en pourcentage. C'est un exemple appliqué de ce que peut signifier développer progressivement le sens des opérations sur les nombres.

À l'ordre d'enseignement secondaire, l'élève poursuit le développement de son raisonnement mathématique en apprenant à généraliser une situation pour tous les nombres appartenant au domaine de la situation. L'élève apprend à émettre une conjecture, à l'affirmer ou à l'infirmer. Dans le cas du rabais et de la taxe en pourcentage, l'élève prend position et tente d'en faire la démonstration en déployant son raisonnement mathématique. Au début, l'élève le fait avec des exemples numériques en dégageant les propriétés mathématiques qui justifient son affirmation, son raisonnement. Progressivement, l'élève développe son habileté à généraliser avec le langage de l'algèbre. Il est alors en mesure de démontrer que son raisonnement est bon pour tous les cas possibles appartenant au domaine des nombres de la situation.

Cette progression se note aussi dans le cadre du développement des concepts et des processus mathématiques chez les élèves de ces deux ordres. L'extrait suivant, tiré du document ministériel sur la progression des apprentissages pour la mathématique, appuie notre propos.

> C'est graduellement que se construit la pensée mathématique chez les élèves […] Dès le primaire, les élèves sont placés dans des situations d'apprentissage […] Ils apprennent ainsi à établir des liens, à se représenter des objets mathématiques de différentes façons et à les organiser mentalement pour en arriver progressivement à l'abstraction […] Au secondaire, les apprentissages se poursuivent dans le même esprit. Ils s'articulent autour des préoccupations sous-jacentes à l'activité mathématique : interpréter le réel, généraliser, anticiper, prendre des décisions. (MELS, 2010, p.5)

L'annexe A présente trois extraits du Programme de formation de l'école québécoise qui appuient la progression que nous décrivons aux paragraphes précédents. Les deux premiers extraits permettent d'observer une progression concernant le développement de la deuxième compétence disciplinaire entre les deux ordres d'enseignement. Au primaire, l'élève applique des concepts et il justifie ses choix. Pour l'ordre d'enseignement secondaire, il est possible d'y observer que l'élève dégage les propriétés mathématiques pour justifier sa conjecture dans le cadre du déploiement d'un raisonnement mathématique. Pour y parvenir, il doit solliciter son sens du nombre et des opérations qu'il a acquis à l'ordre d'enseignement primaire. Le troisième extrait présenté à l'annexe A permet d'observer la progression sur le plan des apprentissages mathématiques. À l'ordre d'enseignement primaire, l'élève traduit son raisonnement mathématique à l'aide des chaînes d'opérations arithmétiques. À l'ordre d'enseignement secondaire, l'élève introduit progressivement le langage de l'algèbre pour exprimer une chaîne d'opérations sous une forme plus générale.

Malgré cette volonté institutionnelle de continuité présente dans les programmes réformés, plusieurs chercheurs notent que la transition d'ordre d'enseignement est une difficulté vécue chez plusieurs élèves (Larose & al., 2006; Laveault, 2006; Chouinard, 2009; Duchesne & Ratelle, 2009). Laveault (2006) divise cette transition d'ordre d'enseignement en trois types : sociale, procédurale et académique. Les transitions sociale et procédurale concernent respectivement un changement dans les relations humaines et un changement dans les habitudes quotidiennes à l'école. À l'ordre d'enseignement secondaire, l'élève se retrouve dans un milieu où il ne côtoie pas nécessairement ses amis du primaire. Il doit construire de nouvelles relations d'amitié avec ses pairs et avec le personnel scolaire de sa nouvelle école. Également, à l'ordre d'enseignement secondaire, l'élève doit apprendre de nouvelles procédures qui exigent plus d'autonomie qu'au primaire. Le changement de classe périodique, la localisation des locaux, la gestion de sa case (combinaison du cadenas, classement de son matériel scolaire, cohabitation…) sont des exemples de transitions procédurales auxquelles il doit faire face. Dans le cadre de notre recherche et de sa problématique, nous nous intéressons plus particulièrement à la transition académique. Ce dernier type traite, entre autres, des changements dans les approches pédagogiques. Au primaire, l'élève développe sa pensée mathématique accompagné par un enseignant généraliste alors qu'au secondaire, l'élève est accompagné par un enseignant spécialiste de la mathématique.

1.2 Causes à l'origine du problème et questions de recherche

Ahlegren & Garfield (1991, cité dans Squalli, 2000) distinguent cinq niveaux de curriculum : le curriculum souhaité, le curriculum enseigné, le curriculum appris, le curriculum retenu et le curriculum appliqué. Pour le milieu scolaire québécois, le curriculum souhaité est représenté par le Programme de formation de l'école québécoise et les manuels scolaires utilisés par les élèves ainsi que par les enseignants. Le second niveau de curriculum, le curriculum enseigné, correspond à l'ensemble des actions que l'enseignant met en œuvre dans sa classe pour soutenir et favoriser les apprentissages chez les élèves. Les curriculums appris et retenus constituent respectivement les apprentissages actuels de l'élève et les apprentissages retenus à la fin d'un cours. Le dernier curriculum, le curriculum appliqué, correspond aux savoirs que les élèves mobilisent ultérieurement au moment où ils doivent faire appel à leurs acquis. Dans le contexte de notre recherche, nous nous intéressons plus particulièrement aux curriculums souhaité et enseigné. Appuyé par des manuels scolaires qui ne favorisent pas nécessairement la transition du raisonnement arithmétique au raisonnement algébrique, l'élève doit développer sa pensée mathématique dans un contexte de transition d'ordre d'enseignement où les pratiques diffèrent. Les principales distinctions entre les raisonnements arithmétique et algébrique sont présentées au chapitre 2.

Kieran (1992) mentionne qu'en général, les manuels de classes à l'ordre d'enseignement secondaire n'abordent pas l'algèbre dans une perspective de transition entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement algébrique. Plus récemment, dans un rapport sur l'analyse des scénarios d'introduction de l'algèbre dans les manuels scolaires québécois du 1er cycle au secondaire, Squalli & al. (2007a) remarquent que les activités qui permettent de développer la généralisation et le raisonnement sur l'inconnue ne sont pas fréquentes.

> Concernant l'introduction à l'algèbre, on note peu de changements par rapport aux manuels de la réforme antérieure. Les manuels restent marqués par l'empreinte d'une longue tradition dans l'enseignement de l'algèbre : 1) une insistance de l'introduction de l'algèbre à partir de l'arithmétique; l'algèbre étant conçue généralement comme une arithmétique généralisée et 2) la grande place donnée à l'apprentissage de la mécanique du calcul algébrique. Pourtant, le programme de 1993 avait tenté de briser ces tendances en mettant en avant l'introduction de l'algèbre dans un double contexte de généralisation et de résolution de problèmes. (p.13)

Quant au curriculum enseigné, Schmidt (1996) soulève la nécessité d'un équilibre, dans les approches didactiques entre l'enseignant généraliste du primaire et l'enseignant spécialiste au secondaire. Elle remarque que les futurs maîtres ont de la difficulté, parfois même de la résistance, à passer du raisonnement arithmétique d'un problème au raisonnement algébrique du même problème et vice et versa. Cette difficulté de transition chez les futurs maîtres peut se traduire, en classe, par une discontinuité des pratiques entre les deux ordres d'enseignement. Par ailleurs, durant trois années scolaires (2009-2010 à 2011-2012), un chantier de travail inter-ordres sur l'arrimage des pratiques enseignantes à la commission scolaire de la Capitale nous permet de remarquer que les élèves éprouvent de la difficulté à justifier leur raisonnement mathématique, à formuler des conjectures et à les confirmer ou à les infirmer toujours à l'aide du raisonnement mathématique.

Comme le montrent Oliveira & Câmara (2010) dans leur recherche, plusieurs élèves éprouvent encore des difficultés en algèbre au 1er cycle du secondaire malgré des programmes qui ont fait l'objet d'une récente réforme. Dans le but de répondre à notre objectif de recherche présenté en introduction, nous tenterons de répondre aux trois questions suivantes :

- Quelles sont les difficultés répertoriées dans les écrits scientifiques en rapport avec le développement de la pensée algébrique dans un contexte de continuité entre l'ordre d'enseignement primaire et le 1er cycle du secondaire?
- Quelles sont les propositions didactiques favorisant le développement de la pensée algébrique dans un contexte de continuité entre l'ordre d'enseignement primaire et le 1er cycle du secondaire?
- Quels sont les moyens à privilégier pour permettre aux enseignants d'intégrer, dans leur pratique, les propositions didactiques favorisant le développement de la pensée algébrique?

Chapitre 2
CADRE CONCEPTUEL

Le chapitre 2 présente le cadre conceptuel de cette recherche. Ce chapitre comporte quatre sections. Dans la première section, nous présentons la définition de l'algèbre élémentaire proposée par Blanton & Kaput (2000). Nous amorçons cette section en présentant quelques repères historiques dans l'évolution de l'algèbre élémentaire (Squalli, 2000). La seconde section du chapitre propose des définitions concernant les raisonnements arithmétique et algébrique. Les définitions présentées s'appuient sur les travaux de Squalli (2000, 2004 et 2007b) et de Bednarz & Janvier (1996). À la troisième section, nous présentons ce qu'est la pensée algébrique ainsi que ses composantes. Les définitions présentées sont tirées des travaux de Kieran (1981 et 1992), Mason (1994) et Squalli (2004 et 2007b). La dernière section du chapitre propose le modèle de Gueudet & Trouche (2007) qui permet, selon nous, d'intégrer dans la pratique les propositions didactiques issues de notre deuxième question de recherche.

2.1 Algèbre élémentaire

Afin de préciser ce qu'est l'algèbre élémentaire et la distinguer de l'algèbre moderne, nous nous permettons d'utiliser quelques repères historiques dans l'évolution de l'algèbre. Nous utilisons la classification que Squalli (2000) suggère dans sa thèse. De plus, ces repères historiques nous permettent de faire un parallèle avec le processus de développement de la pensée algébrique chez les élèves des ordres d'enseignement primaire et secondaire. L'idée de ce parallèle est précisée dans les sections de ce chapitre où il est question des raisonnements arithmétique et algébrique ainsi que dans la section où il est question de la pensée algébrique. Squalli (*Ibid.*) propose une synthèse du développement historique de l'algèbre en huit étapes où les cinq premières concernent le développement de l'algèbre élémentaire :

1. L'idée de l'algèbre selon Al-Khawarizmi;

2. Les algébristes arithméticiens arabes ou l'algèbre comme arithmétique des inconnues;
3. Les algébristes géomètres arabes ou l'algèbre comme théorie des équations algébriques;
4. Cardan et l'application du calcul algébrique à de nouveaux domaines de nombres;
5. Viète et le développement du symbolisme algébrique;
6. Hamilton et l'extension du calcul algébrique à de nouveaux domaines de calcul;
7. Galois et l'introduction des structures algébriques;
8. L'apparition de l'algèbre moderne.

Dès la première étape, il est possible de dégager un élément qui définit l'algèbre élémentaire : opérer sur l'inconnue comme si elle était connue (Squalli, 2007b). Al-Khawarizmi a utilisé une méthode générale pour résoudre des problèmes liés aux transactions commerciales, à l'arpentage, aux mesures géométriques et à des situations en provenance de contextes testamentaires. Avec les opérations arithmétiques classiques sur les nombres, il a utilisé les notions de grandeur inconnue et connue. Pour résoudre les problèmes, il a utilisé les transformations qu'il a nommées : al-jabr et al-muqabala. En langage contemporain, al-jabr désigne la transformation qui consiste à ajouter le même terme aux deux membres d'une équation pour préserver l'état d'équivalence. Pour ce qui est d'al-muqabala, cette seconde transformation signifie l'élimination des termes semblables de chaque côté du symbole « = ».

Les extensions successives des systèmes de nombres $(\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{D} \Rightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R})$ évoluèrent étroitement avec le développement de l'algèbre. Les deuxième, troisième et quatrième étapes témoignent de cette évolution. D'abord les opérations arithmétiques furent appliquées systématiquement aux expressions algébriques. Par la suite, la géométrie a permis le traitement des équations du 3e degré (volume) et l'ajout d'un nouveau système de nombres aux domaines existant : les nombres complexes $(\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{D} \Rightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C})$.

> À titre d'exemple, pour l'équation $x^3 - 63x - 162 = 0$ (équation dite irréductible) la formule de Cardan donne : $x = \sqrt[3]{81+30\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{81-30\sqrt{-3}}$ laquelle, après simplification donne : $x = (-3+2\sqrt{-3}) + (-3-2\sqrt{-3}) = -6$.
> En acceptant d'appliquer à $\sqrt{-3}$ les opérations de base habituelles et en supposant que les propriétés de ces opérations restent aussi valides pour ces nouveaux « objets », Cardan arrive à trouver une solution réelle de l'équation cubique. Le raisonnement heuristique de Cardan est manifestement de nature « analytique ». Cependant, dans ce cas, Cardan n'opère pas sur un objet (un nombre) dont la valeur est temporairement inconnue ni sur une variable dont le domaine de référence est connu, mais plutôt sur des « objets imaginaires ». (*Ibid.*, 2000, p.45)

Squalli (*Ibid.*) fait remarquer que l'émergence du symbolisme littéral à la troisième étape n'a pas empêché, dans les deux premières étapes du développement historique de l'algèbre, d'opérer sur l'inconnue comme si elle était connue. C'est à la cinquième étape que Viète a fait usage des lettres pour désigner des grandeurs inconnue et connue. Le calcul algébrique devient alors le calcul littéral. Ce dernier permet de traiter les cas généraux. Le calcul littéral s'intéresse à la structure du problème plutôt qu'à son expression. Viète opère l'algèbre à partir de trois étapes d'analyse : la zézétique, la poristique et l'exégétique (ou rhétique). En citant Itard, un historien, Squalli (*Ibid.*) permet de comprendre qu'en langage contemporain la zézétique permet de dégager l'équation d'une situation à l'aide d'un symbolisme. La poristique permet d'étudier et de transformer l'équation dégagée par la zézétique. La dernière étape, l'exégétique, permet de résoudre l'équation.

La synthèse du développement historique de l'algèbre se termine avec les étapes 6, 7 et 8. Ces étapes s'associent plus particulièrement au développement de l'algèbre moderne. Cette algèbre n'obéit pas aux propriétés fondamentales des opérations arithmétiques usuelles, comme la commutativité et l'associativité de la multiplication. Elle opère des éléments abstraits qui ne sont plus des objets, des nombres ou des figures de l'arithmétique, de l'algèbre ou de la géométrie classique. L'algèbre moderne est aux études supérieures ce que l'algèbre élémentaire est à l'éducation de base (ordres d'enseignement primaire et secondaire).

En contexte d'algèbre élémentaire, nous retenons la définition de Kaput & Blanton (2000). Ces deux chercheurs émettent comme hypothèse qu'une part importante du problème de l'apprentissage de l'algèbre peut être résolue en adaptant les pratiques enseignantes dès le primaire. Ils soutiennent que l'algèbre élémentaire s'articule autour de cinq aspects :

1. L'algèbre comme processus de généralisation et de formalisation;
2. L'algèbre comme syntaxe respectant des règles (manipulation des expressions algébriques);
3. L'algèbre comme étude des structures et des systèmes abstraits;
4. L'algèbre comme étude des fonctions, des relations;
5. L'algèbre comme outil de modélisation et d'interprétation de situations réelles.

Pour Kaput & Blanton (*Ibid.*), les deux premiers aspects constituent la base fondamentale du raisonnement algébrique et sont présents dans les trois autres aspects. Selon nous, l'ordre de présentation des cinq aspects de cette définition semble respecter, en quelque sorte, les cinq premières étapes des repères historiques du développement de l'algèbre proposés par Squalli (2000). À partir d'expérimentations menées en classe à l'ordre d'enseignement primaire, Kaput & Blanton (2000) constatent que les enseignants, qui ont apporté les ajustements souhaités au matériel traditionnel d'enseignement font émerger, chez leurs élèves, des réponses imprégnées du 1er aspect considéré comme fondamental dans le développement de la pensée algébrique : l'algèbre comme processus de généralisation et de formalisation. C'est avec cette posture que nous tentons de répondre aux questions spécifiques de notre recherche. Le modèle retenu pour adapter les pratiques enseignantes est expliqué à la dernière section du chapitre actuel.

2.2 Raisonnements arithmétique et algébrique

Selon Squalli (2004) les raisonnements arithmétiques et algébriques sont deux modes de pensée différents. Le premier est de nature synthétique : pour trouver la valeur de l'inconnue, on n'opère que sur des données connues. Le second quant à lui est de nature analytique : pour trouver la valeur de l'inconnue, on doit considérer l'inconnue, la représenter par un symbole et opérer sur elle comme on opère sur les données connues. Par exemple, lorsqu'il faut déterminer les dimensions d'un terrain rectangulaire, d'une superficie de 128 m^2, dont la longueur est le double de la largeur, un raisonnement arithmétique possible serait d'identifier tous les produits de deux entiers naturels dont le résultat est 128 et retenir celui contenant deux nombres dont l'un est le double de l'autre : 128 = 128 x 1 = 64 x 2 = 32 x 4 = $\underline{16 \text{ x } 8}$. Dans le cas d'un raisonnement algébrique possible, l'élève pourrait poser « x » pour la largeur et « $2\times x$ » pour la longueur et résoudre l'équation algébrique : $x\times(2\times x)=128$.

Bednarz & Janvier (1996) décrivent la structure d'un problème soutenant le développement du raisonnement algébrique comme une structure non connectée. L'exemple suivant illustre ce type de structure: « 380 students are registered in three sports activities offered during the season. Basketball has 3 times as many students as skating and swimming has 114 more students than basketball. How many students are registered in each of the activities? » (*Ibid.*, p.118)

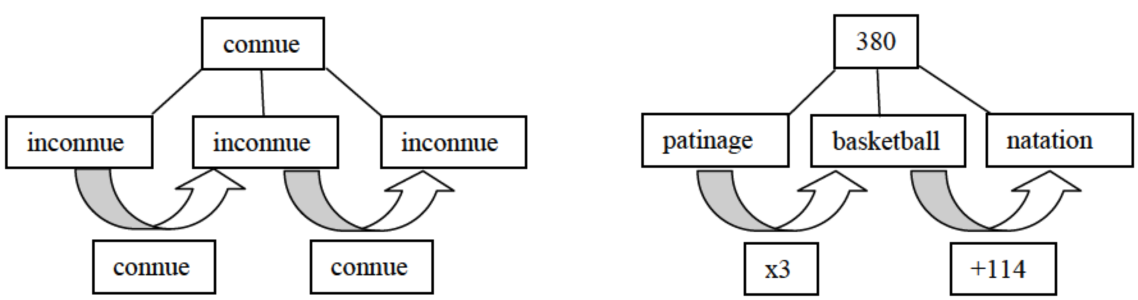


Figure 1 – Structure non connectée

Avec le raisonnement algébrique, le schéma de cette structure non connectée pourrait se traduire par la résolution suivante :

- le nombre d'élèves inscrits au patinage est représenté par x ;
- le nombre d'élèves inscrits au basketball est représenté par $3x$, car il y a 3 fois plus d'élèves inscrits au basketball qu'au patinage (x);
- le nombre d'élèves inscrits à la natation est représenté par $3x+114$, car il y a 114 élèves de plus qu'au basketball ($3x$);
- le nombre total d'élèves inscrits aux trois activités est : $380 = x+3x+(3x+114)$.

$$380 = x+3x+(3x+114) \Longrightarrow 380 = 7x+114 \Longrightarrow 266 = 7x \Longrightarrow 38 = x$$

Dans cet exemple, il y a donc 38 élèves (x) inscrits au patinage, 114 élèves ($3x$) inscrits au basketball et 228 élèves ($3x+114$) inscrits à la natation. Pour résoudre ce problème, l'élève doit considérer le nombre d'élèves inscrits au patinage (x), au basketball ($3x$) et à la natation ($3x+114$) comme des données connues malgré le fait qu'il s'agit de quantités inconnues. Il doit opérer sur ces trois quantités comme si elles étaient connues. L'élève doit également considérer $3x+114$ comme un objet, un tout inconnu. Pour y parvenir, il doit développer une conception structurale de l'expression algébrique (Kieran, 1992). La conception structurale est détaillée dans la prochaine section. Dans ce type de structure, l'élève ne peut pas être efficient en utilisant son raisonnement arithmétique, il doit nécessairement faire appel au raisonnement algébrique.

Dans le cas d'un problème lié au raisonnement arithmétique, Bednarz & Janvier (*Ibid.*) le décrivent comme une structure connectée. L'élève possède une donnée connue qui lui permet de résoudre le problème en utilisant son raisonnement arithmétique. Par exemple, en modifiant la question de la situation précédente, la situation-problème pourrait se poser comme suit : combien d'élèves participent à chacune des activités sachant que 38 d'entre eux sont inscrits au patinage?

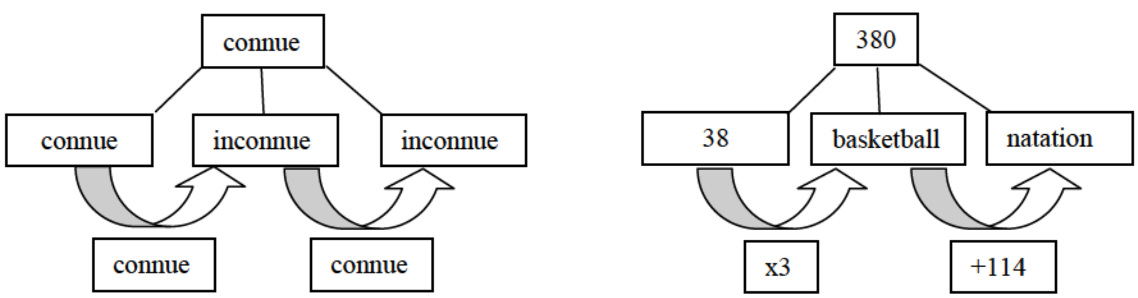


Figure 2 – Structure connectée

Le schéma de cette structure connectée pourrait se traduire par la résolution suivante :

- le nombre d'élèves inscrits au patinage est de 38;
- le nombre d'élèves inscrits au basketball est 3 fois plus élevé que le nombre d'élèves inscrits au patinage (3 x 38 = 114);

- le nombre d'élèves inscrits à la natation est supérieur de 114 par rapport au nombre d'élèves inscrits au basketball (114 + 114 = 228);
- le nombre total d'élèves inscrits aux 3 activités est de 380 = 38 + 114 + 228.

Selon Squalli (2000), la résolution d'un problème dont la structure est non connectée fait appel à la pensée analytique. Pour que l'élève soit en mesure de raisonner algébriquement, il doit développer ce mode de pensée. La notion de pensée analytique est expliquée dans la prochaine section. Pour Squalli (2004), le passage du raisonnement arithmétique au raisonnement algébrique peut très bien se réaliser sans faire appel au symbolisme de l'algèbre. Les premières étapes du développement historique de l'algèbre en font foi. En ce sens, dans l'exemple du problème dont la structure est non connectée, l'élève aurait pu également utiliser la locution *nombre d'élèves inscrits au patinage* au lieu de la lettre x et résoudre quand même le problème tout en opérant sur l'inconnue sans le langage formel de l'algèbre. Il en est de même pour le problème de dimensions du terrain, l'élève peut le résoudre en utilisant le mot *largeur* au lieu de la lettre x. Pour Squalli (*Ibid.*), le raisonnement algébrique n'est pas caractérisé par l'utilisation du symbolisme algébrique, mais par l'opération sur l'inconnue comme si elle était connue. C'est ce qu'il nomme la pensée analytique.

2.3 Pensée algébrique

La définition du raisonnement algébrique à la section précédente nous a permis d'introduire une des deux composantes de la pensée algébrique : la pensée analytique. L'autre composante que nous considérons dans ce cadre conceptuel est la généralisation.

Pour Mason & al. (1994), la généralisation est une nécessité pour le développement du raisonnement mathématique : « Généraliser, c'est découvrir un cheminement qui conduit : à ce qui semble vraisemblable (une conjecture); au pourquoi cela semble vraisemblable (une démonstration); là où cela semble vraisemblable, c'est-à-dire à un énoncé plus général du problème. » (*Ibid.*, 1994, p.19). Dans le contexte du développement de l'habileté à généraliser, nous retenons leur modèle en trois phases : l'approche, l'attaque et la révision. Mason & al (*Ibid.*) insistent sur l'importance de bien saisir le problème en dégageant les données fournies et en identifiant ce qu'il faut trouver. Lorsque le problème est bien compris, ils proposent de procéder par l'exemplification : « Exemplifier, c'est choisir des exemples : au hasard, pour avoir une idée du problème; systématiquement, pour préparer le terrain à une généralisation; astucieusement, pour tester une généralisation. » (*Ibid.*, 1994, p.19). L'exemplification conduit à la résolution ou à l'impasse. Dans ce dernier cas, la phase de révision permet de considérer le problème avec un certain recul. Cette phase consiste à : « vérifier la solution; réfléchir aux idées clés et aux moments clés; étendre le raisonnement à une situation plus large. » (*Ibid.*, 1994, p.31). L'annexe B présente les détails de ce modèle. Pour Squalli & al. (2007a), tout comme la pensée analytique, la généralisation est une composante essentielle de la pensée algébrique. Ils soulignent d'ailleurs l'importance de varier les registres et de ne pas s'en tenir uniquement aux suites numériques.

> Généraliser, formuler et justifier des généralisations est une composante essentielle de la pensée algébrique. L'approche généralisation introduit l'algèbre en mettant l'accent sur le développement de cette composante de la pensée algébrique. […] La généralisation peut avoir comme objet :1) une régularité géométrique ou numérique; 2) une propriété d'une ou de plusieurs opérations (commutativité de l'addition; distributivité de la multiplication par rapport à l'addition…); 3) une formule («l'aire d'un carré de côté a est a^2»; …); 4) la règle d'une relation fonctionnelle; 5) un procédé général de calcul (un algorithme de l'addition…); 6) une proposition mathématique («le produit de deux nombres entiers consécutifs est un nombre pair»…). Le développement de la généralisation peut commencer bien avant l'usage des lettres. Bien plus, la généralisation renforce la tendance à symboliser; puisque pour décrire une généralité on a tendance à recourir à un langage général. (*Ibid.*, p.7)

Concernant la pensée analytique, dans un article portant sur le développement de la pensée algébrique à l'école primaire, Squalli (2007b) écrit que : « Opérer sur l'inconnue est un raisonnement très puissant en mathématique et constitue une composante essentielle de la pensée algébrique. Plusieurs chercheurs y voient même ce qui distingue l'arithmétique de l'algèbre. » (*Ibid.*, p.6). Squalli (*Ibid.*) note qu'opérer sur l'inconnue comme si elle était connue nécessite que l'élève considère le symbole « = » comme un signe d'équivalence. Cet aspect du symbole égal est repris ultérieurement dans cette section et dans le prochain chapitre. Pour appuyer l'importance du développement continu de cette composante essentielle de la pensée algébrique tout au long de l'ordre d'enseignement secondaire, nous nous permettons de citer Filloy & al. (2010) : « Our results enable us to state that algebraic competences that deal with handling a single unknown are not spontaneously extended to two-unknown cases. ». (*Ibid.*, p.75, 2010). Pour ces auteurs, lorsque l'élève est en présence d'une équation algébrique de la forme y = ax+b et où les variables dépendante (y) et indépendante (x) sont à trouver, cela implique qu'il soit capable d'opérer sur l'inconnue simple (le x d'une équation algébrique de la forme ax+b = c ou ax+b = cx+d) et qu'il ait acquis le sens du symbole égal et plus particulièrement son aspect transitif (si a=b et b=c alors a=c). Savoir opérer sur les variables dépendante et indépendante d'une équation algébrique permet à l'élève de franchir la rupture didactique nommée par Filloy & al. (*Ibid.*) et réaliser la résolution d'un système d'équations à la 3^{e} secondaire tout en comprenant le sens des méthodes de résolutions : par comparaison et par substitution. Dans ce contexte, le raisonnement de l'élève se situe au-delà de l'apprentissage d'une procédure ou d'une technique.

Pour acquérir les deux composantes de la pensée algébrique, l'élève doit maîtriser certains aspects du langage de l'algèbre : les conceptions procédurale et structurale d'une expression mathématique, le sens d'équivalence du symbole d'égalité et le sens de la lettre. Définie par Sfard (1991) et reprise par Kieran (1992), la conception structurale exige que l'élève puisse considérer que le résultat d'une opération mathématique n'est pas toujours un résultat numérique et unique. Il est souhaitable qu'à l'ordre d'enseignement primaire, l'élève amorce le développement de sa conception structurale d'une expression et d'une équation mathématique. La conception structurale amène l'élève à comprendre que le traitement d'une expression ou d'une équation mathématique ne donne pas toujours un résultat unique (Kieran, *Ibid.*). Le résultat peut être une nouvelle expression mathématique dont la structure a été transformée et par le fait même représenter une nouvelle connaissance. Cette perspective de nouvelle connaissance peut prendre, par exemple, la forme suivante à l'ordre d'enseignement secondaire : un élève, appuyé par sa conception structurale, peut démontrer que la valeur de x est nécessairement plus grande que 1 pour

$x=\sqrt{2}$ [2]. Pour acquérir une conception structurale de l'expression algébrique, l'élève doit développer le sens d'équivalence du symbole égale. Par exemple, avec sa conception procédurale, l'élève traite l'opération suivante comme une procédure : $3+12=15$. Il cherche une réponse unique en exécutant les opérations de gauche à droite. L'élève qui a développé l'habileté à effectuer des allers-retours entre les conceptions procédurale et structurale est en mesure de traiter l'opération comme une procédure, mais peut aussi la considérer comme une nouvelle expression : $3+12=3+(2\times 6)$ (Kieran, *Ibid.*).

Pour Kieran (*Ibid.*) la conception structurale permet à l'élève de percevoir l'expression algébrique comme un objet en soi. Par exemple, si nous demandons à l'élève d'évaluer $(2a+1)$ dans l'équation algébrique $2(2a+1)+6=16$, ce dernier doit poser la question suivante : quel est le nombre dont le double augmenté de 6 donne le résultat 16? L'élève considère $(2a+1)$ comme un seul nombre, un tout. Il en est de même pour le raisonnement algébrique dans le cas d'un problème dont la structure est non connectée. Dans notre exemple à la section précédente, l'élève doit considérer $3x+114$ (nombre d'élèves inscrits à la natation) comme un objet, un tout inconnu. Il semble que cette conception d'objet ne puisse s'intégrer sans que l'élève ait développé certains aspects du langage de l'algèbre : le sens du symbole d'égalité et le sens de la lettre.

Selon Squalli (2007b) pour saisir le sens d'équivalence du symbole égale, l'élève doit maîtriser ses trois aspects : la réflexivité (a=a), la symétrie (si a=b alors b=a) et la transitivité (si a=b et b=c alors a=c). Les aspects du symbole égal sont détaillés dans le prochain chapitre. Pour ce qui est du sens de la lettre, Jeannotte (2012) utilise une classification par niveau de compréhension (Hart, 1981). Cette classification repose sur les six catégories d'interprétation de la lettre de Küchemann (1981) : 1- la lettre évaluée, 2- la lettre ignorée, 3- la lettre objet, 4- l'inconnue spécifique, 5- le nombre généralisé et 6- la variable. La classification retenue par Jeannotte (2012) comprend 4 niveaux de

---

[2] $$x=\sqrt{2}\rightarrow x^2=2\rightarrow x^2=1+1\rightarrow x^2-1=1\rightarrow (x-1)(x+1)=1\rightarrow x-1=\frac{1}{(x+1)}\rightarrow x=1+\frac{1}{(x+1)}$$

compréhension (Hart, 1981). Au premier niveau de compréhension, l'élève est en mesure de donner une valeur arbitraire à la lettre, il peut aussi ignorer sa présence dans le traitement d'une expression. Le niveau deux est un niveau charnière. À ce niveau l'élève représente la lettre par un objet concret, mais il peut aussi la considérer comme ayant un sens dans une expression. Par exemple, l'expression *bh* peut représenter l'aire d'un rectangle. C'est à partir du troisième niveau de compréhension qu'il accepte qu'une expression puisse être une réponse. À ce niveau, la lettre représente pour l'élève un seul nombre inconnu. Selon la définition de la conception structurale de Kieran (1992), ce niveau de compréhension de la lettre permet à l'élève de considérer l'expression algébrique comme un objet. Au quatrième niveau de compréhension, l'élève est capable d'interpréter le sens d'une relation fonctionnelle exprimée par une fonction.

Dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire, le développement des composantes de la pensée algébrique et de ses aspects doit être soutenu par des enseignants qui comprennent le nœud d'apprentissage et qui sont en mesure de planifier, pour la classe, des actions probantes pour aider les élèves à franchir ce nœud d'apprentissage. Dans cette perspective de pratiques renouvelées, nous présentons ci-après le modèle de Gueudet & Trouche (2007).

2.4 Genèses documentaires communautaires

Pour Gueudet & Trouche (*Ibid.*), le développement professionnel d'un enseignant de mathématiques peut se faire, entre autres, par le processus qu'il utilise pour produire la documentation nécessaire à son rôle d'enseignant tant sur le plan de sa classe que sur le plan organisationnel de l'école où il travaille. Selon ces chercheurs, la documentation représente une activité importante qui occupe beaucoup de temps dans la tâche d'un enseignant. Dans une perspective évolutive, Gueudet & Trouche (*Ibid.*) associent la production documentaire de l'enseignant à son développement professionnel. Ils qualifient cette évolution de genèse documentaire : « Au-delà des nouvelles ressources produites, la genèse documentaire concours au développement professionnel du professeur. » (*Ibid.*, 2007, p.5)

Pour comprendre le modèle proposé par ces auteurs, il importe, dans un premier temps, de distinguer une ressource et un document. Ce dernier est le produit, l'instrument utilisé par l'enseignant pour, entre autres, accompagner ses élèves dans l'apprentissage d'un nouveau concept. Le document est construit à partir d'un ensemble de ressources (manuels, logiciels, sites WEB…) que l'enseignent s'approprie et transforme selon ses connaissances. Selon ce modèle, la production d'un document doit se faire à l'aide de deux processus : l'instrumentation et l'instrumentalisation. Pour Gueudet & Trouche (*Ibid.*), l'instrumentation consiste à produire des schèmes d'utilisation des ressources alors que le processus d'instrumentalisation permet à l'enseignant l'appropriation de la ressource. Par exemple, si un enseignant désire travailler, avec ses élèves, les transformations géométriques et plus particulièrement la rotation d'une figure géométrique. Il peut décider de le faire au tableau blanc interactif suivi d'une séance au laboratoire informatique. Il utilise alors le gratuiciel de géométrie dynamique GeoGebra. Dans le contexte du modèle présenté, les ressources sur lesquelles nous désirons attirer l'attention sont : le tableau blanc interactif, l'ordinateur et GeoGebra. Pour cet exemple, le processus d'instrumentalisation nécessite que l'enseignant s'approprie l'utilisation de GeoGebra afin de réaliser la rotation d'une figure géométrique sur le tableau blanc interactif ainsi que sur un ordinateur. Pour ce qui est du processus d'instrumentation, l'enseignant doit construire un schème d'utilisation : « un schème est une organisation invariante de l'activité, structurée par des invariants opératoires qui se forgent à travers une variété de contextes d'usage. » (Vergnaud, 1996, cité dans Gueudet & Trouche, 2007, p.4) Dans cet exemple, le schème d'utilisation consiste à dégager et à nommer les propriétés ainsi que les invariants associés à la rotation d'une figure géométrique dans l'environnement GeoGebra (plans euclidien et cartésien). La figure 3, de la page suivante, illustre le modèle de ces deux chercheurs.

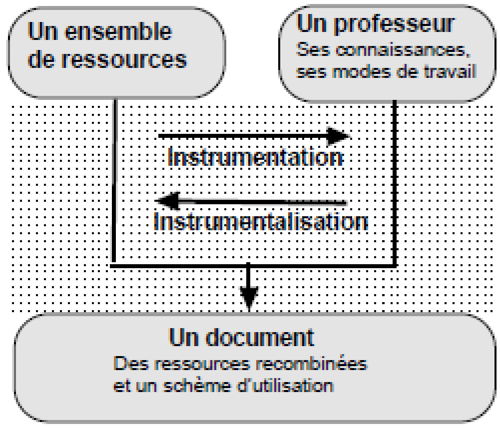


Figure 3 – La genèse d'un document (Gueudet & Trouche, 2007, p.4)

Pour qu'il y ait développement professionnel chez l'enseignant, les documents qu'il produit et qu'il utilise doivent nécessairement évoluer dans le temps. Gueudet & Trouche (*Ibid.*) considèrent la genèse documentaire comme des processus qui ne se définissent pas par un début et une fin mais comme des processus qui évoluent dans le temps. Ils parlent de cycle de conception. Selon ce principe d'évolution temporelle, un document peut, dans ce cycle, devenir une ressource. La figure 4 illustre cette idée d'évolution temporelle où les axes x et y représentent respectivement les ressources et les documents et où l'axe z représente le temps.

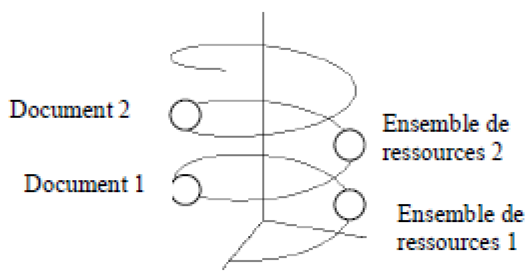


Figure 4 – L'évolution d'un document (Gueudet & Trouche, 2007, p.5)

Le classement des documents est un incontournable dans une perspective d'évolution temporelle. Ce classement doit respecter des balises afin d'assurer la conservation de la mémoire de l'évolution documentaire. Il est d'autant plus important s'il s'agit d'une genèse documentaire communautaire. Dans ce contexte, Gueudet & Trouche (*Ibid.*) parlent d'un vivier de ressources : « le vivier de ressources engendre un système documentaire communautaire, qui affecte la pratique, et donc la communauté, dans un processus d'instrumentation. » (*Ibid.*, 2007, p.18) L'évolution de la structure des ressources communautaires est en corrélation avec le développement professionnel des enseignants qui participent à son évolution.

> Ce que l'on observe, dans cette histoire du modèle, c'est que l'évolution des pratiques de documentation, dans la communauté, conduit l'évolution du modèle et l'évolution du modèle conduit l'évolution des pratiques. Du fait des relations fortes entre ce modèle de ressources et la documentation de la communauté, nous l'appelons modèle documentaire communautaire. Un modèle documentaire communautaire est un document générateur : il facilite la conception de nouveaux documents au sein du système documentaire communautaire; il est générateur d'un questionnement didactique. (*Ibid.*, 2007, p.20)

Gueudet et Trouche (2007) propose un renversement de point de vue : « au lieu de voir le fondement du métier comme face aux élèves, et la documentation pour préparer cela, on considère au contraire que le cœur du métier, c'est le développement professionnel, et donc en particulier le processus documentaire. » (*Ibid.*, 2007, p.22)

Ce renversement de point de vue est en accord avec les documents ministériels issus de la mise en œuvre du Programme de formation de l'école québécoise. Ce dernier balise le développement professionnel de l'enseignant avec la 11^{e} compétence définie dans le référentiel de compétences professionnelles de la profession enseignante.

> S'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel […] la capacité de renouvellement, d'analyse et de réflexion critique y est présentée comme nécessaire à l'adaptation aux réalités changeantes du milieu social et professionnel et à l'évolution de la profession.(MELS, 2001, p.125)

La 11^{e} compétence définie dans le référentiel de compétences professionnelles de la profession enseignante permet de définir les objectifs du développement professionnel et les moyens pour les atteindre. De manière générale, les composantes de cette compétence placent l'enseignant dans un processus réflexif concernant ses pratiques (curriculum enseigné). À partir de son bilan professionnel, l'enseignant réfléchit sur sa pratique, il échange avec ses collègues et il s'inscrit dans une démarche qui permet de résoudre des problèmes d'enseignement. Dans un contexte encadré par des professionnels en éducation, des didacticiens, l'enseignant comprend les enjeux auxquels il doit faire face selon les données récentes de la recherche en éducation. Il renouvelle ses ressources et il entreprend des changements dans ses pratiques. L'annexe C présente les détails des composantes et des objectifs de cette 11^{e} compétence.

Chapitre 3
MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Le chapitre 3 présente la démarche autour de laquelle se structure notre recherche. Il s'agit d'une recherche qualitative qui s'inscrit dans un des douze devis méthodologiques proposés par Paillé (2007). Ce devis est particulier en ce sens qu'il ne fait pas intervenir de sujets humains. Cette recherche est une étude de documents. Le chapitre débute par une présentation des étapes qui ont mené à la rédaction de cet essai. Il se termine par une description de la grille qui a servi pour analyser les textes préalablement sélectionnés.

3.1 Étapes de recherche

Huit étapes structurent notre démarche méthodologique. Dans les paragraphes qui suivent, chaque étape fait l'objet d'une description ainsi que d'une explication concernant son opérationnalisation.

La première étape consiste à opérationnaliser les questions spécifiques de recherche. Pour y parvenir, des indicateurs liés aux éléments présents dans les questions spécifiques de recherche sont identifiés. Ces indicateurs, étroitement liés au cadre conceptuel de cet essai, servent de balises pour la construction d'une grille sur laquelle s'appuie l'analyse des documents pour cette étude. Cette première étape s'est réalisée au mois de janvier 2014.

Les étapes deux, trois et quatre se réalisent en concomitance et de manière itérative. La documentation traitant la pensée algébrique est abondante. Le corpus à examiner (étape 2) traite les documents publiés entre les années 2000 et 2014. Trois textes font exception à cet intervalle de temps. Il s'agit de textes fondateurs rédigés par Kieran (1981 et 1992) et Bednarz & Janvier (1996). Ce sont des chercheuses reconnues dans l'étude des difficultés épistémologiques liées à la transition de l'arithmétique à l'algèbre. L'abondance des documents lors de la collecte (étape 3) et leur richesse en lien avec les indicateurs de notre grille nous mène à conserver l'étendue du corpus (entre 2000 et 2014). C'est l'étude préliminaire des documents (étape 4) qui permet la construction du corpus de textes retenus pour notre analyse. Les étapes 3 et 4 se font de manière itérative afin d'obtenir une liste finale dont les textes sont fortement liés à notre objectif de recherche et aux indicateurs issus des questions spécifiques. Une première liste d'une centaine de textes est construite et raffinée grâce aux outils de recherche suivant : le moteur de recherche du site internet du National Council of Teachers of Mathematics, le moteur de recherche Google Scholar et l'Outil de découvertes du Service des bibliothèques et archives de l'université de Sherbrooke. Ce dernier outil a la particularité de cibler directement les textes dans les banques de données et les périodiques, et ce, en une seule étape. Le raffinement des recherches avec notre liste de mots clés, la lecture du résumé des articles et des discussions avec notre directeur de recherche permettent d'épurer notre première liste et ainsi aboutir à une liste finale de 20 textes. L'annexe D présente notre liste de mots clés et d'auteurs qui ont servi à caractériser nos recherches. Les étapes 2, 3 et 4 se sont déroulées au cours des mois de janvier et février 2014.

C'est à partir de cette liste finale que l'étude approfondie (étape 5) de chaque texte se réalise. Chaque texte retenu est lu et analysé à l'aide des indicateurs de notre grille. Les passages traitant un aspect des indicateurs de la grille d'analyse sont retenus et consignés dans la grille d'analyse correspondant au texte en question. À cette étape, un premier classement des articles est fait. Le classement est basé sur les indicateurs qui prédominent dans le texte analysé. Cette 5^{e} étape s'est réalisée au cours des mois de mars, avril et mai 2014.

La lecture des 20 synthèses produites permet de réaliser les étapes 6 et 7. Le résumé des réponses aux questions de recherche (étape 6) et l'analyse critique des résultats obtenus (étape 7) soutiennent la production de notre plan détaillé de rédaction. Des références aux synthèses d'analyse sont inscrites près des thèmes appartenant à cette structure préliminaire. Le plan de rédaction détaillé de l'essai fut déposé au mois de mai 2014.

La huitième et dernière étape consiste à rédiger l'essai selon le plan de rédaction détaillé. Approuvé par notre directeur de recherche, le plan de rédaction détaillé constitue l'axe autour duquel se structure notre essai. Dans un premier temps, la problématique est présentée. Le premier chapitre se termine par nos questions de recherche. Le deuxième chapitre présente le cadre conceptuel de recherche. Il situe la perspective avec laquelle nous tentons de répondre à nos trois questions spécifiques de recherche. Le chapitre 3 présente la méthodologie de recherche. Le dernier chapitre de l'essai présente les résultats de recherche. Les trois sections de ce chapitre tentent d'apporter respectivement des réponses à chacune des trois questions. Cette dernière étape s'est déroulée au cours des mois de mai, juin, juillet et septembre 2014. Septembre 2014 fut réservé à la révision de notre essai dans le but d'un dépôt pour évaluation.

3.2 Grille d'analyse

La grille d'analyse utilisée dans cette recherche est constituée de six sections. L'annexe E présente la grille d'analyse de cette recherche documentaire. Les première, avant-dernière et dernière sections permettent d'identifier le contexte de la recherche. Il y est question des caractéristiques du texte et des informations sur le volet empirique de la recherche. Le contexte, le type de document, le niveau scolaire ciblé, l'objectif de recherche, la perspective de recherche et les résultats obtenus y sont abordés. La dernière section propose une courte synthèse du texte analysé.

Les sections intermédiaires permettent de colliger des informations relatives aux difficultés liées aux concepts et aux habiletés associées au développement de la pensée algébrique. Elles permettent également de réunir des informations sur les propositions didactiques qui permettent aux élèves de franchir les difficultés épistémologiques associées à la problématique. Les indicateurs d'analyse se trouvent dans ces sections. Leur choix repose sur le fait qu'ils permettent d'identifier, dans les textes retenus, des informations relatives aux composantes de la pensée algébrique et des informations relatives aux aspects du langage de l'algèbre. Nous avons retenu les indicateurs suivants : le sens du symbole « = », le sens de la lettre, les conceptions procédurale et structurale, l'habileté à généraliser et l'habileté à opérer sur l'inconnue comme si elle était connue. Ces indicateurs ont été définis au chapitre précédent.

Notre démarche nous a mené à entreprendre la rédaction de cet essai au mois de mai 2014. Le premier dépôt du texte de l'essai s'est fait au début du mois de juillet 2014. Une première rétroaction de la part de notre directeur de recherche s'est faite à la fin du mois d'août 2014. Le dépôt final pour l'évaluation s'est fait le 14 septembre 2014.

Chapitre 4
PRÉSENTATION DES RÉSULTATS DE RECHERCHE

L'intention de ce chapitre est de présenter les résultats de notre recherche documentaire. Chaque question de recherche est l'objet d'une section où nous apportons des réponses qui respectent l'angle d'analyse donné en cohérence avec notre cadre conceptuel. À la première section du chapitre, nous proposons des éléments de réponse à la question portant sur les difficultés répertoriées dans les écrits scientifiques en rapport avec le développement de la pensée algébrique. Nous y abordons quatre thèmes : le sens du symbole d'égalité, le raisonnement algébrique, le sens de la lettre et les pratiques traditionnelles d'enseignement de la mathématique. Dans la deuxième section du chapitre, nous traitons la seconde question de recherche. Nous présentons des éléments de réponse à la question portant sur les propositions didactiques visant à soutenir le développement de la pensée algébrique. Nous avançons des réponses qui s'articulent autour de trois thèmes : l'opérationnalisation de la 2e compétence disciplinaire pour la mathématique aux ordres d'enseignement primaire et secondaire, l'habileté à généraliser et l'habileté à opérer sur l'inconnue. Nous terminons le chapitre en suggérant des moyens pour soutenir le développement professionnel des acteurs en éducation dont la problématique de notre recherche suscite un intérêt.

4.1 Première question de recherche

Selon l'analyse des textes que nous avons réalisée, quatre facteurs récurrents semblent constituer les nœuds d'apprentissage que nous identifions en lien avec les difficultés vécues par les élèves dans le développement de leur pensée algébrique. Il s'agit du sens donné au symbole d'égalité, de la difficulté à réaliser le passage du raisonnement arithmétique au raisonnement algébrique, du sens donné à la lettre et des pratiques traditionnelles d'enseignement de la mathématique (curriculum enseigné) influencées par les manuels scolaires (curriculum souhaité). Nous les considérons comme des éléments de réponse à notre première question de recherche : Quelles sont les difficultés répertoriées dans les écrits scientifiques en rapport avec le développement de la pensée algébrique dans un contexte de continuité entre l'ordre d'enseignement primaire et le 1er cycle du secondaire?

4.1.1 Sens du symbole d'égalité

Les textes analysés nous permettent de dégager, selon des auteurs différents, que le sens du symbole « = » est sans aucun doute l'élément du problème qui est traitée le plus fréquemment chez les chercheurs de notre liste (Kieran, 1981 et 1992; Squalli, 2007b; Knuth & al., 2008; Leavy & al., 2013).

Tout au long de l'ordre d'enseignement primaire, les apprentissages arithmétiques traditionnels conduisent l'élève à développer et à enraciner une compréhension opérationnelle du symbole « = ». Selon Kieran (1981, 1992), cette compréhension opérationnelle s'enracine progressivement. Au départ, cette compréhension est intuitive et elle est constituée de deux aspects : la comparaison de deux ensembles sur le plan de leur cardinalité et l'union des deux ensembles pour en faire un troisième. Le symbole d'égalité est introduit, dès le début de la scolarisation d'un élève, comme une notion opérationnelle. L'élève considère que deux éléments connectés par un opérateur doivent nécessairement être remplacés par un troisième. Cette compréhension du symbole d'égalité mène l'élève, au début de l'ordre d'enseignement secondaire, à une certaine confusion entre l'aspect opérationnel et fonctionnel du symbole « = ». En citant les travaux de Vergnaud & al. (1979), Kieran (1992) mentionne que cette confusion se reflète par la violation de deux des trois aspects du symbole d'égalité : la symétrie (si a=b alors b=a) et la transitivité (si a=b et b=c alors a=c). Nous rappelons que dans notre cadre conceptuel, nous notons qu'un élève doit comprendre les trois aspects du symbole d'égalité pour le considérer comme un symbole d'équivalence; le premier de ces trois aspects étant la réflexivité (a=a).

> In elementary school the equal sign is used more to announce a result than to express a symmetric and transitive relation. In attempting to solve the problem: Daniel went to visit his grandmother, who gave him $1.50. Then be bought a book costing $3.20. If he has $2.30 left, how much money did he have before visiting his grandmother? Sixth graders will often write 2.30+3.20 = 5.50-1.50 = 4.00 (Vergnaud, Benhadj, & Dussouet, 1979). The symmetry and the transitivity of the equal sign are violated. The equal sign is read as "it gives," that is, as a left-to-right directional signal. (*Ibid*., p.393)

Les textes retenus décrivent cette difficulté comme l'absence d'une compréhension relationnelle qui contraint le développement de la pensée algébrique (Kieran, 1981 et 1992; Squalli, 2007b; Knuth & al., 2008; Leavy & al., 2013). Les élèves considèrent ce symbole comme un signal d'exécution d'un calcul. Ils ne le considèrent pas comme un symbole d'équivalence.

> Au primaire, les élèves ont souvent une conception limitée du signe égal. Ils l'interprètent comme le signal d'exécution d'un calcul de gauche à droite, le membre de gauche contient les opérations à effectuer, celui de droite contient la réponse du résultat des calculs. Ainsi, certains élèves n'acceptent pas l'égalité 6 = 4 + 2, car, selon eux, le signe = devrait être placé après l'expression 4 + 2 et avant le résultat 6. De même, concernant l'égalité 5 + 4 + 3 = 15 - 3, certains disent qu'elle est fausse, car le résultat de 5 + 4 + 3 est 12 et non 15 ; d'autres la refusent et la rendent sous une forme « plus acceptable », comme 5 + 4 + 3 + 3= 15. (Squalli, 2007b, p.2)

En citant plusieurs recherches, Kieran (1981) remarque que cette incompréhension du symbole « = » peut se perpétuer jusqu'à l'ordre d'enseignement collégial. Au primaire, l'élève comprend le symbole d'égalité comme le signal d'exécution d'un calcul. Au secondaire, l'élève élargit sa compréhension en acceptant que des expressions exprimant la même valeur soient placées de chaque côté du symbole « = ». L'analyse de traces de résolution d'équations réalisées par des élèves (secondaire et début collégial) ne permet pas d'identifier à quel moment le symbole d'égalité devient un symbole d'équivalence pour l'élève. Kieran (1992) réitère l'importance de ce niveau d'interprétation du symbolisme algébrique. Elle mentionne que les élèves, à l'ordre d'enseignement secondaire, ont de la difficulté à considérer l'expression algébrique comme un objet mathématique dû au sens qu'ils donnent au symbole d'égalité. Comme il fut mentionné à la section sur la pensée algébrique du cadre conceptuel, l'élève est incapable de laisser en suspens une expression. Ces élèves éprouvent de la difficulté avec l'aspect symétrique du symbole « = ».

Knuth & al. (2008) soulignent le fait qu'approximativement 50 % des élèves des niveaux 6^{e} année primaire et 1er cycle du secondaire (grades 6, 7 et 8) possèdent une compréhension opérationnelle du symbole « = ». Ces élèves considèrent cette importante composante de l'activité algébrique comme un symbole d'exécution d'un calcul. Selon eux, cette compréhension limitée du symbole d'égalité est un obstacle important à l'apprentissage de l'algèbre. Pour Knuth & al. (*Ibid.*), il est important que les enseignants de ces niveaux soient sensibilisés à cette compréhension opérationnelle et qu'ils profitent des occasions d'enseignement pour soutenir les élèves à développer une compréhension relationnelle du symbole « = ».

Comme pour Kieran (1992), Squalli (2007b) remarque qu'il s'agit probablement du résultat d'une longue culture arithmétique au primaire où le symbole égal est souvent associé au résultat de l'exécution d'une ou plusieurs opérations. Pour ce chercheur, cette compréhension incomplète du symbole d'égalité chez l'élève devient une source de difficulté lorsqu'il doit trouver une valeur inconnue et résoudre des équations. Selon lui, pour que le symbole d'égalité devienne un symbole d'équivalence, l'élève doit maîtriser ses trois aspects : la réflexivité (a=a), la symétrie (si a=b alors b=a) et la transitivité (si a=b et b=c alors a=c).

4.1.2 Raisonnement algébrique

Comme nous l'avons mentionné dans le cadre conceptuel de notre recherche, le raisonnement algébrique est un processus de pensée que l'élève doit s'approprier afin de soutenir le développement de sa pensée algébrique. Il est important de rappeler que les raisonnements arithmétiques et algébriques sont deux modes de pensée différents. Le premier est de nature synthétique : pour trouver la valeur de l'inconnue, on n'opère que sur des données connues. Le second quant à lui est de nature analytique : pour trouver la valeur de l'inconnue, on doit considérer l'inconnue, la représenter par un symbole et opérer sur elle comme on opère sur les données connues (Squalli, 2004). À ce niveau, l'élève doit concevoir l'expression algébrique avec une approche structurale (Kieran, 1992). Cet aspect a été traité dans le cadre conceptuel au chapitre 2.

Oliveira et Câmara (2010) notent que les stratégies de raisonnement mathématique utilisées par les élèves du primaire sont les mêmes que les stratégies utilisées par les élèves du secondaire. Elles remarquent que la majorité des élèves utilisent des stratégies arithmétiques et peu d'élèves utilisent des stratégies algébriques. Il n'y a pas d'évolution significative dans l'utilisation d'une stratégie algébrique entre les élèves de la 1re secondaire et les élèves de la 2^{e} secondaire. Pour Oliveira et Câmara (*Ibid.*), approximativement 40 % des élèves ne voient pas les liens entre l'arithmétique et l'algèbre.

Squalli (2007b) associe cette situation au fait que les élèves éprouvent de la difficulté à quitter le raisonnement arithmétique pour passer au raisonnement algébrique. Selon ce chercheur, cette difficulté est en partie causée par les longs apprentissages arithmétiques à l'ordre d'enseignement primaire et par l'insistance des activités sur les suites numériques à l'ordre d'enseignement secondaire. L'enseignement des suites numériques ne favorise pas le développement du raisonnement algébrique. L'élève n'y voit pas la nécessité et surtout la pertinence du raisonnement algébrique, car il peut résoudre par son raisonnement arithmétique. Kieran (1992) considère que les apprentissages arithmétiques enracinent une conception procédurale de l'expression mathématique ce qui a pour conséquence que les élèves éprouvent de la difficulté à considérer l'expression mathématique comme un objet mathématique et dans certains cas, laisser des opérations en suspens. Tout au long du primaire, l'élève développe une conception procédurale des opérations par le biais de ses apprentissages arithmétiques. Il traite une expression mathématique comme une suite d'opérations à appliquer afin d'obtenir une valeur numérique unique. Cette approche procédurale des expressions et des équations se poursuit au début du secondaire lorsque l'élève doit, pour résoudre un système, remplacer la variable d'une expression algébrique par une valeur numérique. L'élève résout, par essais-erreurs une équation algébrique où l'inconnue est présente dans un seul membre de l'équation, il n'est pas à l'aise d'opérer sur l'inconnue.

> Another example involves the solving of $2x + 5 = 11$ by substituting various values for x until the correct one is found. In both these ostensibly algebraic examples, the objects that are operated on are not the algebraic expressions but their numerical instantiations. Furthermore, the operations that are carried out on these numbers are computational - they yield a numerical result. (Kieran, 1992, p.392)

Pour Kieran (1992), cet état chez l'élève s'illustre par la préférence qu'ils ont à justifier une généralisation avec des exemples numériques (approche procédurale). Selon cette chercheuse, trois éléments pourraient être responsables de cette difficulté qu'éprouvent les élèves à percevoir une expression algébrique de manière structurale : l'apprentissage, l'enseignement et le contenu. Concernant l'apprentissage, deux thèmes émergent : l'aspect arithmétique du raisonnement procédural des opérations et la difficulté de considérer l'expression algébrique comme un objet mathématique. Pour l'auteure, l'élève doit développer sa capacité à effectuer des allers-retours entre les conceptions procédurale et structurale. Cet apprentissage doit se faire en investissant plus de temps en classe avec ce qu'elle nomme la conception procédurale de l'algèbre. Il semble qu'il s'agisse d'un passage intermédiaire entre les raisonnements arithmétique et algébrique. Cette chercheuse croit que les enseignants introduisent trop tôt le langage formel de l'algèbre dans les activités de classe. Elle considère qu'il existe un passage intermédiaire avant qu'un élève puisse concevoir une expression mathématique de manière structurale. L'élève doit développer une conception procédurale du langage formel de l'algèbre avant d'être en mesure de raisonner de manière structurale. Le développement de cette conception procédurale du langage formel de l'algèbre se construit en permettant à l'élève d'utiliser son langage naturel pour désigner les objets sur lesquels il opère. Le développement du raisonnement algébrique ne doit pas se faire à l'aide d'une approche par l'apprentissage du langage de l'algèbre (Kieran, 1992). Lee & Freiman (2006), Labelle (2008) et Perry (2014) notent que l'enseignement d'une procédure, dont les bases s'articulent autour du langage de l'algèbre, n'est pas approprié pour apprendre à l'élève comment généraliser. Dans ce contexte, l'élève ne généralise pas, il applique une procédure qu'il a mémorisée.

Pour ce qui est des deuxième et troisième éléments que Kieran (1992) croit être responsables de cette difficulté qu'éprouvent les élèves à percevoir une expression algébrique de manière structurale, elle fait remarquer que le matériel pédagogique actuel ne favorise pas l'approche structurale relié au succès du développement de la pensée algébrique. Kieran (*Ibid.*) note qu'il existe peu de matériel pédagogique destiné aux enseignants qui désirent accompagner leurs élèves dans cette trajectoire. Selon Kieran (*Ibid.*), ce sont les facteurs qui doivent retenir le plus l'attention des chercheurs.

> If algebra teachers tend to teach what is in the textbooks, then a seemingly obvious first step toward changing the teaching of algebra-assuming that one wanted to change the way in which algebra is taught-would appear to be that of modifying the way algebra is presented in textbooks. […] Many first-year algebra courses begin with literal terms and their relation to numerical referents within the context of, first, algebraic expressions and, then, equations. After a brief period involving numerical substitution in both expressions and equations, the course generally continues with the properties of the different number systems, the simplification of expressions, and the solving of equations by formal methods. The manipulation and factoring of polynomial and rational expressions of varying degrees of complexity soon becomes

> a regular feature. Interspersed among the various chapters are word problems, thinly disguised as "real world" applications of whatever algebraic technique has just been learned. (*Ibid.*, p.394)

Plus récemment, Squalli & al. (2007a) font un constat similaire en réalisant l'analyse de trois manuels scolaires dans une perspective d'introduction de l'algèbre au 1er cycle du secondaire. Ils notent que pour les élèves, le passage d'un stade arithmétique à un stade algébrique est difficile à réaliser. Dès le début des années 90, Squalli & al. (*Ibid.*) soulignent les transformations du curriculum de l'enseignement de l'algèbre. Ces transformations définissent une vision de l'algèbre dans une perspective élargie. La pensée algébrique ne s'articule pas uniquement autour d'une arithmétique généralisée. Elle doit se développer par des activités favorisant la généralisation et la pensée analytique. Cette perspective élargie débute bien avant l'utilisation des lettres. Dans ce contexte de refonte du curriculum de l'algèbre, les chercheurs présentent 4 approches didactiques d'introduction de l'algèbre au 1er cycle du secondaire : par l'apprentissage de son langage, dans un contexte de résolution de problèmes, dans un contexte de généralisation et par l'étude des relations fonctionnelles. Malgré les avantages constatés par l'introduction de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes et de généralisation, les auteurs des 3 manuels scolaires analysés semblent s'en tenir à l'étude des suites numériques pour généraliser et introduire ainsi la mécanique du calcul algébrique.

En amont des difficultés identifiées, Carraher & al. (2001, 2006) remarquent que les pratiques d'enseignement différentes entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire provoquent une discontinuité d'apprentissage entre l'arithmétique et l'algèbre. Selon eux, à l'ordre d'enseignement primaire, l'élève n'a pas l'occasion d'utiliser son intuition arithmétique pour opérer sur l'inconnue. Ils mentionnent que cette discontinuité entre les raisonnements arithmétique et algébrique est en partie causée par le fait que l'élève débute à opérer sur l'inconnue trop tard et souvent c'est avec le champ de l'algèbre qu'il le fait pour la première fois. Dans cette perspective de continuité entre les deux ordres d'enseignement, Tent (2006) souligne l'importance du sens des opérations sur les nombres comme un prérequis au passage du raisonnement arithmétique vers le raisonnement algébrique. Elle insiste particulièrement sur les propriétés de distributivité, de commutativité et d'associativité. Tent (*Ibid.*), mentionne que plusieurs élèves ne font pas la distinction, dans l'application de ces propriétés, entre les opérations d'addition et de multiplication.

> Some students have a hard time distinguishing between the associative and the distributive properties. Many assume that if they see parentheses, it must mean that the distributive property is being used, but this is not always the case. For example, 7(8 + 4) = 7x8 + 7x4 is an application of the distributive property; however, 7(8x4) is not. […] Another mistake that students often make with the properties is trying to apply the commutative or associative property to an expression involving both addition and multiplication […] several students give me an example like this: 3x5 + 6 = 3x6 + 5. (*Ibid.*, p.24-25)

Toujours dans une perspective de continuité, Russell (2011) remarque que cette difficulté chez les élèves à s'approprier le raisonnement algébrique dépend aussi d'une incompréhension des fondements sur les opérations mathématiques ainsi que leurs propriétés.

> […] (-3+-5=8) two negatives make a positive […] $(a + b)^2$ is interpreted in the same way they would interpret 2(a + b) […] multiply everything inside the parentheses by the number outside the parentheses, which would work for 2(x + y), but not for 2(xy). They incorrectly apply what they think is the distributive property and do not recognize an application of the associative property. **(**Russell, 2011, p.45)

Dans ce contexte, Kieran (2011) parle d'une pensée relationnelle entre les quantités, les nombres et les opérations numériques. Au mieux, ces élèves réussissent dans un contexte arithmétique et sont incapables de transférer leur raisonnement dans un contexte algébrique. Au pire, ces élèves mémorisent des procédures et ils les utilisent dans des situations hors contexte en commettant des erreurs.

Il semble que les difficultés à raisonner de manière algébrique puissent aussi être à l'origine de difficultés supplémentaires ultérieurement à l'ordre d'enseignement secondaire. Par exemple, pour ce qui est d'opérer sur l'inconnue en résolution de système d'équations, Filloy & al (2010) identifient deux autres sources de difficultés : la polysémie de l'inconnue et le traitement simultané des variables dépendante et indépendante. La première source de difficulté survient lorsque l'inconnue occupe plus d'une place dans les opérandes d'un système d'équations. Par exemple, lorsque l'élève est face à l'expression $x+\frac{x}{4}=6+\frac{x}{3}$, il doit trouver la valeur de *x* qui semble différente selon les opérandes. La seconde source de difficulté émerge au moment où l'élève est en présence d'une équation à deux variables : $y = 3x + 5$. La variable y devient l'inconnue de l'expression $3x + 5$ où x est aussi une inconnue. Pour trouver *y*, l'élève doit trouver la variable x en considérant $3x + 5$ comme un tout. L'élève doit faire appel à sa conception structurale de l'expression algébrique. Pour y parvenir, l'élève doit posséder une compréhension adéquate du rôle que joue la lettre dans le langage algébrique.

4.1.3 Sens de la lettre

Le troisième facteur récurrent, que nous retenons après l'analyse des textes, est le statut de la lettre. Comme composante de l'activité algébrique, elle est considérée comme un nœud d'apprentissage chez les élèves (Darley, 2009; Malisani & Spagnolo, 2009; Jeannotte, 2005 et 2012). Les différents sens qu'elle peut prendre rendent la lettre complexe à interpréter. Dans cette intention, nous avons retenu et analysé le texte de Jeannotte (2012). Elle se questionne sur le degré de compréhension de la lettre dans un contexte d'algèbre chez les élèves formés avec le Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ). Pour répondre à son questionnement, elle échantillonne 157 élèves dont 98 proviennent d'une école privée et 59 d'une école publique. Tous les élèves sont en 2^{e} et en 3^{e} secondaire. Jeannotte (*Ibid.*) souligne que les élèves de 2^{e} secondaire provenant du secteur public sont des élèves en difficulté.

Basée sur les six catégories d'interprétation de la lettre de Küchemann (1981), elle compare les résultats au test de son échantillon aux résultats obtenus dans les années 70. Les six catégories d'interprétation de la lettre sont (Jeannotte, 2012, p.5) :

1. la lettre évaluée, une valeur arbitraire ou non est attribuée à la lettre par l'élève;
2. la lettre ignorée, l'élève ne tient pas compte de la lettre dans le calcul;
3. la lettre objet, elle représente un objet ou une abréviation pour l'élève;
4. l'inconnue spécifique, l'élève considère la lettre comme un seul nombre inconnu;
5. le nombre généralisé, l'élève peut donner plusieurs valeurs à la lettre mais cette dernière n'en prend qu'une à la fois;
6. la variable, la lettre représente un ensemble de valeurs pour l'élève.

Elle mentionne que le taux de réussite de son échantillon est égal ou supérieur aux résultats obtenus par les élèves qui ont fait le même test à la fin des années 70. Elle remarque que le PFÉQ permet aux élèves d'utiliser plus adéquatement les 3 catégories d'interprétation de la lettre favorable à la réussite avec l'algèbre. Jeannotte (*Ibid.*) indique que les élèves utilisent moins souvent les 3 premières catégories qui mènent à une interprétation erronée de la lettre : la lettre ignorée, la lettre évaluée et la lettre objet. Pour Jeannotte (*Ibid.*), les élèves d'aujourd'hui ont moins de difficultés que les élèves de la décennie 70 à utiliser la lettre en tant qu'inconnue, nombre généralisé ou variable. Il n'en demeure pas moins que la lettre est encore un nœud d'apprentissage.

Il importe d'être sensibilisé aux quatre niveaux de compréhension (Hart, 1981) que cette chercheuse a utilisés. Le premier niveau de compréhension de la lettre inclut trois catégories : la lettre évaluée, la lettre ignorée et la lettre objet. À ce niveau, l'élève peut contourner l'opération sur l'inconnue en utilisant ses connaissances numériques ou en utilisant des techniques de comptage. L'élève qui ne réussit pas à ce niveau donnera une valeur arbitraire à la lettre (lettre évaluée), il ignorera complètement la lettre (lettre ignorée) ou il associera un objet à la lettre dont elle sera l'abréviation (lettre objet). Le second niveau de compréhension de la lettre est, à notre avis, le niveau charnière entre une incompréhension du sens de la lettre une compréhension adéquate, c'est-à-dire interpréter la lettre comme une inconnue, un nombre généralisé ou une variable. À ce niveau, l'élève accepte que des opérations soient effectuées sur la lettre dans un contexte empirique. Par exemple, il accepte l'expression *bh* comme étant l'aire d'un rectangle. Lorsque l'élève atteint les troisième et quatrième niveaux de compréhension, il est apte à interpréter la lettre adéquatement dans un contexte de relations fonctionnelles. Pour Labelle (2008), il apparaît important que l'élève atteigne ces niveaux de compréhension dès la fin du 1er cycle au secondaire.

> Pour les élèves, il paraît insensé d'effectuer des opérations sur des lettres qui sont censées représenter des nombres, mais dont les valeurs numériques demeurent inconnues. Or, s'il est vrai que ces derniers ont de la difficulté à composer avec des lettres ayant un tel statut, alors ils risquent fort d'être complètement dépassés lorsqu'ils seront confrontés à des expressions algébriques ou se côtoient variables et paramètres, tous représentés par des lettres, mais dont les unes représentent des

quantités inconnues, et les autres des quantités supposément connues, comme dans l'équation y = ax + b. (*Ibid.,* p.13)

4.1.4 Pratiques traditionnelles d'enseignement de la mathématique

Comme nous l'avons mentionné à quelques reprises, nous croyons que les pratiques d'enseignement et les manuels scolaires sont en partie responsables de la problématique nommée qui est à l'origine de cette recherche documentaire. Les résultats de notre recherche nous permettent d'établir un lien entre le développement professionnel de l'enseignant et les pratiques d'enseignement traditionnelles du généraliste au primaire ainsi que les pratiques d'enseignement traditionnelles du spécialiste au secondaire. Ce lien nous porte à croire qu'il y a une incidence entre l'existence des facteurs récurrents décrits aux sections précédentes et les connaissances de l'enseignant, ses croyances et ses pratiques.

Notre dernier facteur récurrent se retrouve dans presque tous les textes analysés. Il est souvent nommé explicitement et parfois il émerge à travers le texte. Il s'agit du curriculum enseigné, c'est-à-dire l'ensemble des actions mises en œuvre par l'enseignant pour accompagner les élèves dans le développement des compétences disciplinaires en mathématique.

Mitchell & Koellner (2007) ont analysé la construction de savoirs significatifs chez l'élève reliés au développement du raisonnement algébrique : le sens du symbole « = », la variable, l'utilisation de représentations formelles en algèbre (équation et graphique), la généralisation et la résolution de problème. Ils considèrent que le développement du raisonnement algébrique n'est pas un processus naturel ciblant un résultat prédéterminé. Cette construction de savoirs mathématiques, entre autres comprendre et utiliser des représentations formelles en algèbre, se fait dans un contexte soigneusement planifié et préparé par l'enseignant. Ce dernier doit mener les élèves à faire appel aux connaissances antérieures nécessaires et les aider à évoluer progressivement afin de donner un sens aux nouveaux apprentissages. Par exemple, l'enseignant qui souhaite donner un sens aux équations algébriques s'appuiera sur des exemples de réalités empiriques connus des élèves. Chez ces derniers, cette réalité est souvent teintée de processus arithmétiques et de langage naturel que nous nommons, à ce niveau du développement, processus personnels. Selon nous, il semble s'agir du passage intermédiaire nommé par Kieran (1992).

L'enseignant doit savoir qu'il est nécessaire d'aborder les équations avec cette réalité sans nécessairement faire appel au langage formel de l'algèbre. Mitchell & Koellner (*Ibid.*) citent des chercheurs (Nathan & Koedinger, 2000; Nathan & Petrosino, 2003) qui suggèrent que plusieurs enseignants du domaine de la mathématique méconnaissent l'importance des stratégies informelles utilisées par les élèves en algèbre. Ces stratégies sont souvent un passage obligé lié au développement progressif d'habiletés et de compétences nécessaires à l'activité algébrique. Ces mêmes enseignants croient que les habiletés s'enseignent de manière formelle comme s'il s'agissait d'une procédure. Ces croyances et ces connaissances des enseignants sont profondément enracinées dans les pratiques que nous nommons pratiques traditionnelles.

Sans que ce soit nommé dans l'analyse de ces chercheurs, nous pensons que le même phénomène se produit aussi à l'ordre d'enseignement primaire où trop souvent le sens des opérations sur les nombres est développé à l'aide uniquement d'une approche procédurale où le symbole d'égalité est le signal d'exécution d'un calcul. Nous soutenons cette hypothèse en nous appuyant sur la remarque que Schmidt (1996) fait concernant les futurs maîtres ainsi que sur ce que note Kieran(1981) concernant le sens donné au symbole d'égalité par les élèves. Mitchell & Koellner (2007) remarquent qu'il y a une disparité grandissante entre les besoins des élèves (apprentissages) et la formation des enseignants (connaissances et croyances). Dans le contexte de leur recherche sur le développement du raisonnement algébrique, le développement professionnel continu des enseignants devient un incontournable pour réduire cette disparité

4.2 Deuxième question de recherche

D'après les textes retenus dans le cadre de notre recherche documentaire, trois thèmes nous apparaissent pertinents dans le but d'apporter des éléments de réponses à notre seconde question de recherche : Quelles sont les propositions didactiques favorisant le développement de la pensée algébrique dans un contexte de continuité entre l'ordre d'enseignement primaire et le 1er cycle du secondaire? Selon nous, dans un premier temps, il s'agit de l'opérationnalisation de la deuxième compétence disciplinaire aux ordres d'enseignement primaire et secondaire. Par la suite, dans cette même perspective de continuité, nous traitons des propositions didactiques qui favorisent le développement des deux composantes essentielles au développement de la pensée algébrique : la généralisation et la pensée analytique.

4.2.1 **Opérationnalisation de la deuxième compétence disciplinaire dans une trajectoire « *early algebra* »**

Les éléments de réponses à notre première question de recherche nous permettent de penser qu'actuellement, le curriculum enseigné ne semble pas permettre à tous les élèves de développer le plein potentiel de leur pensée algébrique et plus particulièrement de soutenir le passage entre leur raisonnement arithmétique et leur raisonnement algébrique. Nous pensons que les quatre éléments de réponse à notre première question de recherche ont une incidence sur le développement continu, entre les deux ordres d'enseignement, de la deuxième compétence disciplinaire du Programme de formation de l'école québécoise : *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques/Déployer un raisonnement mathématique*. Squalli (2007b) note que cette compétence disciplinaire propose une perspective intéressante pour le développement du raisonnement mathématique.

> D'inspiration socio-constructiviste, le nouveau Programme de formation de l'école québécoise insiste sur le développement de compétences mathématique. […] Parmi les trois compétences mathématiques proposées, une a trait explicitement au développement de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques. On entend maintenant insister plus que par le passé sur le développement de certains processus de pensée fondamentaux en mathématiques et non plus simplement sur l'enseignement de connaissances et d'habiletés techniques. (*Ibid.*, p.1)

Nous pensons que l'enseignant doit accompagner l'élève à développer toutes les composantes de cette deuxième compétence et évaluer cette dernière avec tous ses critères. Il doit le faire au-delà du développement des habiletés techniques du raisonnement mathématique comme nous l'avons nommé dans la problématique de cette recherche. Dans la pratique quotidienne, l'enseignant doit saisir toutes les occasions pour montrer à l'élève comment justifier ses actions faisant appel à des concepts ou à des processus mathématiques, et ce, dès l'ordre d'enseignement primaire. Nous proposons que le développement continu de cette compétence disciplinaire s'inscrive dans une trajectoire « *early algebra* ».

À la fin des années 80 et au début des années 90, plusieurs chercheurs se sont questionnés sur les difficultés dans la transition entre l'arithmétique et l'algèbre (Filloy & Rojano, 1989; Sfard, 1991; Kieran, 1992; Linchevski & Herscovics, 1996). Ces chercheurs ont traité la problématique dans une perspective de rupture entre l'arithmétique et l'algèbre. Pour Sfard (*Ibid.*) et Kieran (*Ibid.*), cette rupture concerne la difficulté qu'ont les élèves à développer une conception structurale des expressions mathématiques et à effectuer des allers-retours entre les conceptions procédurale et structurale selon le contexte. D'ailleurs, il en a été question dans la section précédente. Filloy & Rojano (*Ibid.*) traitent la rupture comme une incapacité chez l'élève à opérer sur l'inconnue au moment où il accède à l'ordre d'enseignement secondaire : « The operational insufficiency exhibited at the pre-symbolic stage of algebra suggests the presence of a cut, i.e. a break in the development concerning operations on the unknown, now at the level of individual thought. » (*Ibid.*, p.19). Il en est de même chez Linchevski & Herscovics (*Ibid.*) : « The literal symbol was being viewed as a static position, and an operational aspect entered only when the letter was replaced by a number. This inability to spontaneously operate on or with the unknown constituted a cognitive obstacle that could be considered a gap between arithmetic and algebra. » (*Ibid.*, p.41). Ces chercheurs traitent la problématique dans une perspective de transition entre les champs de l'arithmétique et de l'algèbre. C'est une problématique vécue lors de la transition d'ordre d'enseignement.

Au début des années 2000, des chercheurs ont analysé la problématique sous un angle différent (Kaput & Blanton, 2000 et 2005; Carraher & al., 2001 et 2006; Squalli, 2007b). En supposant que les longs apprentissages arithmétiques à l'ordre d'enseignement primaire soient une cause importante de cette rupture entre l'arithmétique et l'algèbre, ces chercheurs proposent de travailler avec les élèves, dès le primaire, le développement des processus fondamentaux en mathématique. Comme pour les chercheurs de « *l'époque précédente* », ils identifient les mêmes éléments problématiques en s'inscrivant dans une approche préventive. Ces chercheurs se situent dans le courant que nous avons nommé précédemment : « *early algebra* ». Ce mouvement, du début des années 2000, s'installe dans une trajectoire continue du développement de la pensée mathématique de l'élève à partir du curriculum souhaité actuel.

Dans la trajectoire « *early algebra* », Squalli (2007b) souhaite insister plus que par le passé sur le développement de certains processus fondamentaux de pensée en mathématiques et non plus simplement sur l'enseignement de connaissances et d'habiletés techniques. En collaboration avec sa collègue didacticienne Claudine Mary, ils proposent des pistes d'actions aux enseignants du primaire et du secondaire pour soutenir les processus fondamentaux nécessaires au développement de la pensée algébrique chez les élèves. À l'ordre d'enseignement primaire, l'élève doit développer le sens des opérations sur les nombres. Il doit prendre conscience des propriétés mathématiques qui régissent les opérations sur les nombres. En réfléchissant sur le calcul, l'élève développe des stratégies numériques. Dès l'ordre d'enseignement primaire, l'élève doit apprendre à opérer sur l'inconnue et à généraliser. Au début, il le fait avec le langage naturel et progressivement il introduit un langage de plus en plus formel. Concernant la transition du langage naturel au langage formel chez nos élèves, nous nous permettons de rappeler l'idée d'un parallèle qu'il est possible d'établir entre les repères historiques du développement de l'algèbre (Squalli, 2000) et le développement de la pensée algébrique chez l'élève. Au secondaire, cette progression se poursuit. L'élève améliore ses habiletés à généraliser et à opérer sur l'inconnue. C'est à ce niveau que le langage algébrique est introduit. L'annexe F présente les pistes d'actions proposées par ces deux chercheurs en lien avec le développement de la pensée algébrique. Nous nous permettons d'inscrire ces pistes dans une perspective de développement continu de la deuxième compétence disciplinaire entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire.

Dans une synthèse commentée sur les recherches récentes concernant la pensée algébrique dans la trajectoire « *early algebra* », Kieran (2011) démontre que l'algèbre ne se définit pas par ses symboles littéraux, mais plutôt par une manière de penser. Dès le primaire, cette façon de penser s'amorce avec l'arithmétique dans une perspective impliquant, la structuration des quantités, l'analyse sur la façon dont les quantités varient et l'identification des liens entre les variables d'un problème. Selon Kieran (*Ibid.*), c'est l'enseignant qui amène l'arithmétique enseignée dans cette direction avec le matériel scolaire actuel. Certains chercheurs parlent d'apprentissages dans une perspective écologique. L'enseignant choisit les occasions de questionner ses élèves pour les aider à se fabriquer des modèles, à généraliser. Il aide ses élèves à voir l'arithmétique avec un regard algébrique. En citant Blanton & Kaput (2011), Kieran (2011) nous permet de penser que ces processus fondamentaux en mathématique, nécessaires au développement de la pensée algébrique, peuvent s'acquérir au travers le développement de la seconde compétence disciplinaire pour la mathématique.

> Conjecturing, generalizing, and justifying are central to the developing of algebraic thinking, according to Blanton and Kaput. In their chapter within this volume, these authors suggest further that tasks ought not only to involve these processes but also build upon systematic variation in the values of problem parameters: "Deliberately transform single-numerical-answer arithmetic problems to opportunities for pattern building, conjecturing, generalizing, and justifying mathematical relationships by varying the given parameters of a problem." But how, Blanton and Kaput ask rhetorically, does this transformation lead to algebraic thinking or, specifically, functional thinking? They respond: "Varying a problem parameter enables students to generate a set of data that has a mathematical relationship and using sufficiently large quantities for that parameter leads to the algebraic use of number." (*Ibid.*, p.589)

Russell & al. (2011) posent comme hypothèse que les activités mathématiques qui relient l'arithmétique et l'algèbre ont le potentiel de renforcer la compréhension du sens des opérations sur les nombres chez les élèves. Ils identifient quatre types d'activité mathématique favorisant le développement des processus fondamentaux pour la mathématique : comprendre le comportement des opérations arithmétiques, généraliser et justifier des situations arithmétiques, étendre le domaine des nombres dans lequel les opérations arithmétiques sont effectuées et utiliser une notation qui a un sens pour l'élève.

> Focusing on these aspects of arithmetic addresses two major goals: (1) It enables students to grow from arithmetic towards algebra, and (2) it strengthens their understanding of arithmetic operations and contributes to computational fluency. (*Ibid.*, p.44)

Ces quatre types d'activité mathématique appartiennent aux composantes qui définissent la seconde compétence disciplinaire. Elles s'inscrivent aussi dans les pistes d'actions, proposées par Squalli & Mary (2012). Russell & al (2011) notent que ces types d'activités mathématiques ont un effet bénéfique autant chez les élèves qui réussissent que chez les élèves qui ont de la difficulté avec la mathématique. Dès le début, à l'ordre d'enseignement primaire, ils proposent de bonifier les apprentissages mathématiques des manuels scolaires (perspective écologique) en permettant aux élèves de prendre conscience des propriétés qui régissent les opérations mathématiques. Cette prise de conscience se fait dans un contexte où l'élève doit émettre une conjecture, pressentir la régularité, la formuler et la justifier. À la 2e année du primaire, ils proposent de réfléchir sur la commutativité, sans la nommer, et les opérations d'addition et de soustraction. Russell & al (*Ibid.*) proposent aussi à des élèves de 6e année du primaire et de 1re année du secondaire une réflexion sur la propriété de distributivité. Le début de l'annexe G présente les détails de ces deux activités. Dans le cadre de l'activité sur la distributivité, nous attirons votre attention sur l'utilisation de registres différents pour justifier la conjecture. Ces chercheurs proposent également des activités adaptées qui permettent aux élèves de comprendre la nécessité d'étendre le système des nombres dans un contexte de généralisation. À la deuxième section de l'annexe G, l'activité conduit les élèves à se questionner si ce qu'ils affirment comme régularité est aussi vrai lorsque la question s'étend des nombres naturels aux nombres entiers. Dans cette activité, les élèves concluent que si $a+b=c$ alors $c-a=b$. Aux deuxième et troisième sections de l'annexe G, Russell & al (*Ibid.*) proposent une activité où les élèves doivent se questionner quant à l'effet sur le produit de deux opérandes dont l'un est divisé par un nombre naturel et l'autre est multiplié par le même nombre naturel. Pour cette activité, nous tenons aussi à vos faire remarquer l'utilisation de registres variés (textuel, géométrique et tableau).

4.2.2 <u>Habileté à généraliser</u>

Comme il fut mentionné à plusieurs reprises dans ce travail de recherche, la généralisation est l'une des deux composantes essentielles au développement de la pensée algébrique. Pour Squalli & Mary (2012), le développement de cette habileté doit débuter à l'ordre d'enseignement primaire en proposant des activités où les élèves apprennent à pressentir des régularités, à les formuler et à les justifier. Squalli & al. (2007a) soulignent d'ailleurs l'importance de varier les registres et de ne pas s'en tenir uniquement aux suites numériques.

Pour développer cette habileté, l'enseignant doit montrer aux élèves comment dégager une généralité mathématique en émettant des conjectures, en les confirmant ou en les infirmant à l'aide du raisonnement mathématique. Le développement de cette habileté s'inscrit dans le développement continu de la deuxième compétence disciplinaire pour les ordres d'enseignement primaire et secondaire : *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques/Déployer un raisonnement mathématique*. Dans le but d'assurer une opérationnalisation de toutes les composantes et tous les critères de cette compétence, nous croyons nécessaire de proposer un cadre de développement. En ce sens, pour les ordres d'enseignement primaire et secondaire, Mason & al. (1994) proposent trois phases pour aider l'élève à mettre en application son raisonnement mathématique et ultimement le mener à généraliser : approche (exemplification), attaque (généralisation) et la révision. Ce modèle, applicable aux deux ordres d'enseignement, a fait l'objet d'une présentation à la section 2.3 de ce travail de recherche. Nous nous permettons de rappeler l'importance des trois phases et plus particulièrement la phase d'approche où l'élève utilise l'exemplification : « Exemplifier, c'est choisir des exemples : au hasard, pour avoir une idée du problème; systématiquement, pour préparer le terrain à une généralisation; astucieusement, pour tester une généralisation. » (*Ibid.*, 1994, p.19). C'est à l'annexe B que nous avons présenté une synthèse détaillée des trois phases. Nous considérons que ce cadre permet à l'élève de développer cette compétence disciplinaire au-delà de l'application des concepts et de processus mathématiques. L'analyse des textes sélectionnés appuie notre propos en ce qui concerne le développement de cette compétence disciplinaire dans une perspective de continuité entre les ordres d'enseignement et le lien que nous établissons avec le développement de la pensée algébrique.

Kaput & Blanton (2000) croient qu'au primaire, le développement de l'habileté à généraliser peut se faire avec les propriétés des opérations et à partir du matériel traditionnel d'enseignement. Pour réussir, ils estiment que l'enseignant doit inclure dans le curriculum enseigné, les opportunités présentes dans le matériel traditionnel pour soutenir la généralisation (perspective écologique). Ces chercheurs insistent sur l'importance de développer « un regard et une écoute algébrique » dans un contexte d'apprentissages arithmétiques.

> A central part of an integrated strands approach (vs. a traditional approach) to algebra reform is recognizing that the genesis of algebraic thinking lies in younger children's mathematical activities, in opportunities for them to generalize and formalize their thinking. Because of this, it has been argued that the degree to which elementary

> teachers are capable of developing children's algebraic thinking may determine the depth of algebra reform and hence, mathematics reform in general (Kaput, in press; Schifter, in press). (*Ibid.,* p.9)

Kaput & Blanton (*Ibid.*) proposent, par exemple, d'utiliser l'apprentissage de la table de multiplication pour réfléchir sur le sens de l'opération de multiplication. En introduisant un facteur manquant, l'enseignant offre l'opportunité aux élèves de réfléchir sur les fondements de l'algorithme de la division. En réfléchissant sur le calcul, les élèves présentent et nomment la régularité présente dans l'algorithme de l'opération division.

> I was teaching the 5 table. The children of course find this table very easy, so I figured this would be a good place to start to find missing factors. I gave the class the problem '5 x a = 20' […] Dan said that he could find the answer by subtracting. I asked him to explain his thinking. He said take 20 – 5, 15 – 5, 10 – 5, and 5 – 5. Then he said to count the number of times you had to subtract 5. There were 4 times that you subtract, so the missing number had to be 4. (*Ibid.,* p.20)

Toujours par le biais du développement du sens des opérations sur les nombres, Kaput & Blanton (2005) proposent un autre exemple où les élèves doivent généraliser à propos de la parité du résultat lors de l'addition de 2 nombres pairs ou impairs. Après l'analyse du résultat obtenu avec l'addition de deux nombres inférieurs à 10, l'enseignante demande à ses élèves si le type de résultat obtenu se répète avec les grands nombres. Elle termine son intervention en délaissant le registre des nombres pour questionner les élèves en leur demandant de répondre avec le registre verbal.

> June challenged a student's use of an arithmetic strategy to deduce that 5 + 7 was even: **1** June: How did you get that? **2** Tony: I added 5 and 7 and then I looked over there [pointing to a visible list of even and odd numbers on the wall] and saw that it was even. **3** June: What about 45678 + 85631? Odd or even? **4** Jenna: Odd. **5** June: Why? **6** Jenna: Because 8 and 1 is even and odd, and even and odd is odd. By using numbers large enough that students could not compute their sum, June required students to think in terms of even and odd properties to determine parity. […] June had asked students to determine the result of adding three odd numbers: "If we added odd plus odd plus odd, what would the sum be?" Students argued that "the sum would have to be odd because 2 odds make an even and when you add odd plus even, you get odd." (*Ibid.,* p.422 et 427)

Kaput & Blanton (*Ibid.*) classent ces exemples dans la catégorie de l'arithmétique généralisée. Un troisième exemple appartenant à cette catégorie consiste à réfléchir sur les opérations d'addition avec un tableau 10x10 des nombres de 1 à 100. En adoptant « un regard et une écoute algébrique », il est possible d'observer, avec les élèves, la commutativité de l'addition de manière symbolique : 46 □ □(46+1+10) est équivalent à 46 □□ (46+10+1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figure 5 – Table des nombres naturels de 1 à 100

Kaput & Blanton (*Ibid.*) soutiennent également que pour développer l'habileté à généraliser, les élèves doivent apprendre le raisonnement fonctionnel. Les activités de cette catégorie mènent l'élève à établir une relation fonctionnelle entre deux objets. Les patrons géométriques (Lee & Freiman, 2006; Kinach, 2014) sont des exemples. L'exemple suivant, de la catégorie du raisonnement fonctionnel, utilise un registre différent. L'enseignant demande à ses élèves combien de poignées de main seront données si chaque personne doit serrer la main une fois à toutes les personnes d'un groupe de 4 personnes, d'un groupe de 6 personnes, d'un groupe de 12 personnes. Sans le calculer, il est possible d'élaborer un raisonnement qui place en relation le nombre de personnes dans le groupe et le nombre de poignées de main. Dans le contexte de la démarche que Mason & al. (1994) proposent pour apprendre à généraliser, l'annexe H présente deux stratégies d'élèves où il est possible d'observer, à des degrés différents, ce que ces chercheurs nomment l'exemplification. La première stratégie, de ce problème sur les poignées de main, nous permet d'observer l'exemplification systématique. À ce niveau les élèves pressentent la régularité et ils sont près de dégager une généralité. La seconde stratégie présentée à l'annexe H illustre entièrement le processus d'exemplification. Au départ, les élèves choisissent quelques exemples pour se faire une idée du problème. Par la suite, ils raisonnement systématiquement avec des exemples numériques contigus pour en dégager une généralisation, une formule valide pour tous les cas.

Pour Kieran (2011), ce type d'activité mathématique demandant de placer en relation les quantités, les nombres et les opérations joue un rôle important sur le développement de la pensée algébrique et plus particulièrement sur la conception structurale de l'expression algébrique. Selon cette chercheuse, ultérieurement, les élèves qui ont développé leur habileté à généraliser auront développé également des stratégies en lien avec les sous structures des expressions algébriques.

> In high school algebra, students are often called upon to look for relationships in symbolic expressions in terms of underlying structure, such as for example, seeing $x^6 - 1$ both as $((x^3)^2 - 1)$ and as $((x^2)^3 - 1)$, and so being able to factor it in two ways (either as a difference of squares or as a difference of cubes) […] it is clear that the unpacking of quantity, number, and numerical operations and seeing such unpacked objects in terms of their underlying structure has its parallels in the seeing of relationships in literal expressions at the high school level. (*Ibid.,* p.585)

Dans le contexte du développement du raisonnement fonctionnel, nous constatons que dans les textes analysés, le registre des patrons géométriques semble être favorisé par plusieurs chercheurs (Lee & Freiman, 2006; Kinach, 2014; Perry, & Cyrus, 2014). Son aspect visuel le rend facilement descriptible avec le langage naturel. Aux annexes I et J, nous proposons deux processus que nous considérons complémentaires et qui permettent le développement de l'habileté à généraliser à l'aide du registre des patrons géométriques.

L'annexe I présente le modèle en T de Lee & Freiman (2006). Ces deux chercheurs proposent un processus progressif soutenu par huit questions. Les deux premières questions permettent aux élèves d'identifier différents patrons qui se dégagent avec le modèle en T. Il est demandé aux élèves d'expliquer dans leurs mots, avec le langage naturel, la progression du patron qu'ils ont trouvé. L'intention des troisième et quatrième questions consiste à faire prendre conscience aux élèves que leur raisonnement arithmétique ne leur permet pas de solutionner les questions posées par l'enseignant. Les élèves constatent la nécessité d'utiliser le raisonnement algébrique pour être efficients. Les questions 5, 6 et 7 permettent à l'élève de faire une transition du langage naturel au langage formel de l'algèbre. Ces trois questions introduisent la lettre comme inconnue ainsi que la notion d'expressions algébriques équivalentes.

> Children who are attempting to express perceived patterns mathematically are in an excellent position to learn algebraic language and engage in algebraic activity. […] Work with repeating patterns in the early grades, or teaching patterns as a "topic" in the middle grades, may not foster the development of algebraic thinking in students. […] We will refer to the « growing T » pattern. (*Ibid.*, p.428)

Les différents patrons identifiés par les élèves pour le modèle en T sont des expressions algébriques équivalentes. Nous soulignons qu'à cette étape, selon le degré de maîtrise du langage formel de l'algèbre chez les élèves, il est possible d'introduire le calcul littéral tout en lui donnant du sens. Nous considérons la dernière question comme une phase de mobilisation des connaissances où l'enseignant demande aux élèves de produire un problème faisant appel aux patrons géométriques.

Kinach (2014) favorise également les patrons géométriques. Elle définit une progression en deux étapes pour l'élève qui développe l'habileté à généraliser. L'annexe J présente les deux étapes du développement du raisonnement fonctionnel selon cette chercheuse : la généralisation par analogie et la généralisation par extension. Selon nous, les étapes du modèle de Kinach (*Ibid.*) sont complémentaires au modèle en T de Lee & Freiman (2006) en ce sens que ce qu'elle nomme la généralisation par analogie consiste à reproduire, avec un patron géométrique, ce que Lee & Freiman (*Ibid.*) proposent de faire au cours des 5 premières questions. Les dernières questions de Lee & Freiman (*Ibid.*) s'inscrivent dans la généralisation par extension nommée par Kinach (*Ibid.*). Dans le cadre du développement du raisonnement fonctionnel, Kinach (*Ibid.*) note qu'au départ, l'élève généralise par analogie : « students "generalize by analogy" when they identify a pattern in this sequence of four growing towers and sketch the next figure in the sequence ».(*Ibid.*,p.434) À ce moment, l'élève est en mesure d'associer sa description de l'évolution du patron géométrique à une règle avec ou sans l'utilisation du langage formel de l'algèbre. Par la suite, l'élève généralise par extension : « students "generalize by extension" when they identify a pattern and write a formula for the number of bricks in a tower of any size. ».(*Ibid.* ,p.434) Pour Kinach (*Ibid.*), il est important de faire progresser le degré de difficulté des patrons géométriques. Elle illustre cette progression avec le problème qu'elle nomme « the border problem ». Dans un premier temps, l'élève doit trouver combien de tuiles de dimensions $c \times c$ sont nécessaires pour marquer le périmètre d'un carré constitué de n tuiles de dimensions $c \times c$. Le travail sur les surfaces est progressif pour devenir un travail sur le volume. L'élève doit trouver combien de cubes de dimensions $c \times c \times c$ sont nécessaires pour couvrir un cube constitué de n cubes de dimensions $c \times c \times c$.

Kinach (*Ibid.*) remarque une évolution dans le raisonnement de l'élève. Au début, elle qualifie le raisonnement de récursif. L'élève cherche à exprimer un terme en fonction du précédent. Lorsque l'élève est en mesure d'exprimer un terme selon sa position, sans faire référence au précédent, il est en mesure de généraliser par extension. Il propose alors une forme explicite de la formule qui généralise la situation.

4.2.3 Habileté à opérer sur l'inconnue

La seconde composante de la pensée algébrique est l'opération sur l'inconnue comme si elle était connue. Squalli (2000) parle du mode de pensée analytique. Pour plusieurs chercheurs, la pensée analytique distinguerait les raisonnements arithmétique et algébrique (Lins, 1992; Bednarz et Janvier, 1996; Squalli, 2000). Pour développer sa pensée analytique, l'élève doit comprendre le symbole d'égalité comme un symbole d'équivalence (Squalli, 2007b). Cet aspect fut traité à la première question de recherche. Pour Leavy & al. (2013), la balance à plateau est un excellent moyen pour développer le sens d'équivalence du symbole « = » chez les élèves. Leavy & al. (2013) traitent l'importance d'une compréhension significative du symbole d'égalité dès le primaire. Selon eux, cette compréhension de l'égalité aide l'élève à faire la transition entre l'arithmétique et l'algèbre en lui donnant une base qui lui servira lorsqu'il apprendra à travailler avec les équations et les inéquations. Ces chercheurs qualifient cette transition d'une compréhension opérationnelle du symbole d'égalité à une compréhension relationnelle.

Concernant le développement de la pensée algébrique dans la trajectoire « *early algebra* », Squalli & Mary (2012) notent l'importance de passer progressivement du langage naturel de l'élève à un langage de plus en plus formel. Dans cette perspective et plus particulièrement pour le développement de la pensée analytique, Squalli (2007b) propose une activité de manipulation dont les objectifs sont : « […] amener les élèves sans calculer à : 1- reconnaître que deux quantités sont équivalentes; 2- reconnaître que l'équivalence de deux quantités est conservée par certaines transformations; 3- trouver la transformation pour rendre une quantité équivalente à une quantité donnée. » (*Ibid.*, p.3) Une synthèse de l'activité est présentée à l'annexe K. Dans cette séquence d'enseignement, nous souhaitons souligner la ressemblance entre la progression de l'activité au travers les différentes situations proposées et les trois premières étapes des repères historiques du développement de l'algèbre (Squalli, 2000). Les premières situations offrent à l'élève, l'opportunité de passer d'une compréhension opérationnelle à une compréhension relationnelle du symbole d'égalité. Squalli (2007b) utilise les manipulations d'Al-Khawarizmi : al-jabr et al-muqabala. Ces manipulations ont fait l'objet d'une définition dans le cadre conceptuel de cette recherche. C'est à la situation 4 que l'opération sur l'inconnue comme si elle était connue s'amorce. Nous présentons cette activité, car nous pensons qu'elle peut faire l'objet d'une séquence d'enseignement tant à l'ordre d'enseignement primaire qu'au premier cycle du secondaire. Sans faire appel au langage formel de l'algèbre, Squalli (*Ibid.*) utilise progressivement les formes d'équations algébriques suivantes : $ax \pm b = c$, $ax \pm b = cx \pm d$ et $y = ax^2 \pm b$. À l'ordre d'enseignement secondaire, cette séquence peut soutenir le développement de la pensée analytique et elle peut aussi être utilisée par l'enseignant qui désire introduire le langage formel de l'algèbre tout en donnant un statut significatif à la lettre utilisée comme inconnue selon Küchemann (1981, cité dans Jeannotte (2012)). Nous soulignons aussi l'importance de la dernière situation où l'élève doit trouver les valeurs des variables dépendante et indépendante. Comme nous l'avons mentionné dans notre cadre conceptuel, lorsque l'élève doit trouver la valeur de la variable dépendante cela implique qu'il soit capable d'opérer sur l'inconnue simple. Pour Filloy & al. (2010), c'est ce qui permet à l'élève de donner du sens à la résolution d'un système d'équations.

Pour Carraher & al. (2006), l'algèbre est trop souvent introduite par l'enseignant (curriculum enseigné) avec une équation du premier degré de la forme $ax \pm b = cx \pm d$ ou une variante de la forme $ax \pm b = c$. Selon ces chercheurs, cette approche génère plusieurs questions sans réponse chez l'élève. Ce dernier a tendance à percevoir la variable comme un contenu à valeur unique. Dans la trajectoire « *early algebra* », ils proposent d'opérer sur l'inconnue dans une perspective de relation fonctionnelle. Avec les élèves de 8 à 10 ans, ils utilisent ce qu'ils nomment « *the variable number line* ». Il s'agit d'une droite numérique dont les nombres sont remplacés $n+1$, $n+2$, $n+3$… dans la direction positive croissante et $n-1$, $n-2$, $n-3$… dans la direction négative décroissante. La valeur n sur la droite sépare les deux directions et elle occupe une position arbitraire qui n'est pas nécessairement l'équivalent de la valeur 0. Pour en arriver à opérer sur ce que Carraher & al. (*Ibid.*) nomment « *the variable number line* », les élèves doivent se familiariser avec les structures additives traitées sur une droite numérique. L'enseignant doit illustrer comment varient une mesure et des quantités en utilisant la droite numérique standard. L'élève doit faire la distinction entre un nombre et un déplacement. Par exemple + 6 représente 6 espaces entre 2 nombres, il ne représente pas 6 nombres. Par analogie, + 6 représente 6 espaces entre les poteaux d'une clôture, il ne représente pas 6 poteaux de clôture. Il faut aussi aborder le sens négatif d'un nombre et son traitement sur la droite numérique. Avant de remplacer la droite numérique standard par « *the variable number line* », les élèves doivent également saisir l'aspect infini de la droite numérique.

> In our approach, they first encounter "additive offset" functions, a subclass of linear functions of the form x + b […] we will show, as children work with the number line and with a variable number line, they can come to effectively deal with variables and functional covariation to approach problems involving additive relation. (*Ibid.*, p.94)

Lorsque l'élève saisit ce qui a été mentionné précédemment, Carraher & al. (*Ibid.*) proposent d'introduire « *the variable number line* » avec une mise en situation concrète.

L'annexe L présente deux situations où les élèves opèrent sur l'inconnue avec « *the variable number line* ». Ces chercheurs constatent que des élèves de 8 à 10 ans sont en mesure de comprendre les fonctions additives et aussi d'utiliser des expressions algébriques de la forme n devient $n + 3$ et $y = x + 3$. Carraher & al. (*Ibid.*) remarquent que les structures additives constituent une opportunité pour faire de l'arithmétique avec un regard algébrique. Elles permettent également d'opérer sur l'inconnue en introduisant la variable avec ce qu'ils nomment avec « *the variable number line* ». Avec cette approche que nous nous permettons de classer dans la trajectoire « *early algebra* », ces chercheurs notent qu'il s'agit d'une occasion qui favorise le développement du raisonnement algébrique dès l'ordre d'enseignement primaire.

> (1) children's understanding of additive structures provides a fruitful point of departure for an "algebrafied arithmetic"; (2) additive structures require that children

> develop an early awareness of negative numbers and quantities and their representation in number lines; (3) multiple problems and representations for handling unknowns and variables, including algebraic notation itself, can and should become part of children's repertoires as early as possible; and (4) meaning and children's spontaneous notations should provide a footing for syntactical structures during initial learning, even though syntactical reasoning should become relatively autonomous over time. (*Ibid.*, p.109-110)

Selon des chercheurs (Squalli, 2007b; Carraher & al.,2006) savoir opérer sur l'inconnue est une habileté essentielle au développement de la pensée algébrique. Sans cette habileté, souvent exprimée par le langage naturel, plusieurs élèves éprouveront des difficultés lorsqu'ils seront confrontés à une situation du type : $ax \pm b = cx \pm d$. Bednarz & Janvier (1996) suggèrent que les problèmes utilisés dans le curriculum enseigné aient une structure non connectée. Il en fut d'ailleurs question au chapitre 2. Avec ce type de structure, l'élève doit faire appel à son raisonnement algébrique pour opérer sur l'inconnue. L'élève doit solutionner un problème où il existe au moins une relation entre les données et où une quantité totale est connue. Dans le cadre de leur recherche sur le développement de la pensée algébrique chez les élèves du 3e cycle du primaire et du 1er cycle au secondaire, Oliveira & Câmara, (2010) ont utilisé trois types de structure non connectée afin de varier les enchaînements entre les données : l'enchaînement du type composition de relations, l'enchaînement du type source et l'enchaînement du type puits. Les trois figures suivantes illustrent ces trois types d'enchaînement.

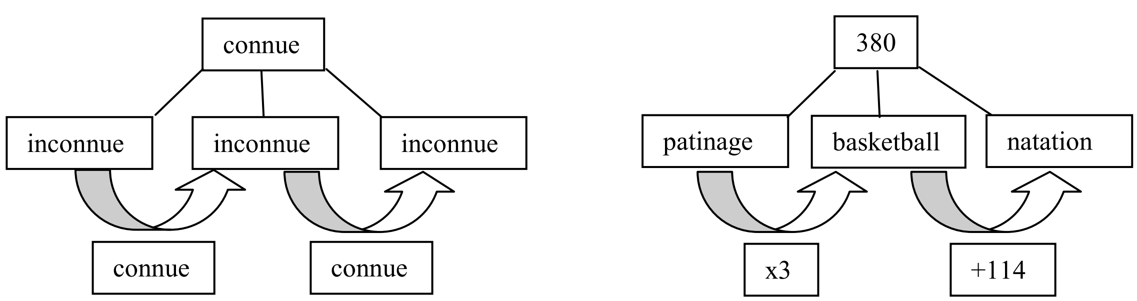


Figure 6 – Structure non connectée, enchaînement du type composition de relations

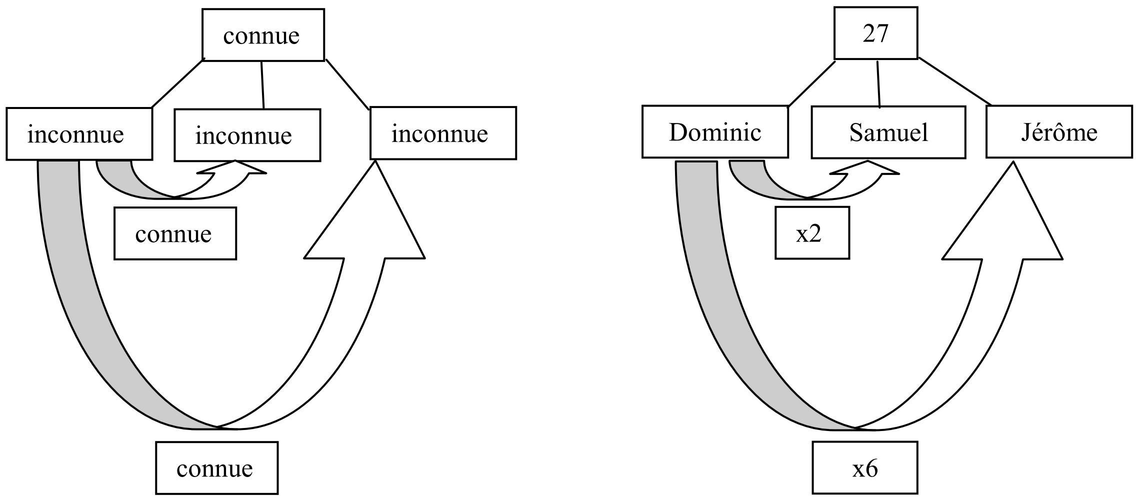


Figure 7 – Structure non connectée, enchaînement du type source

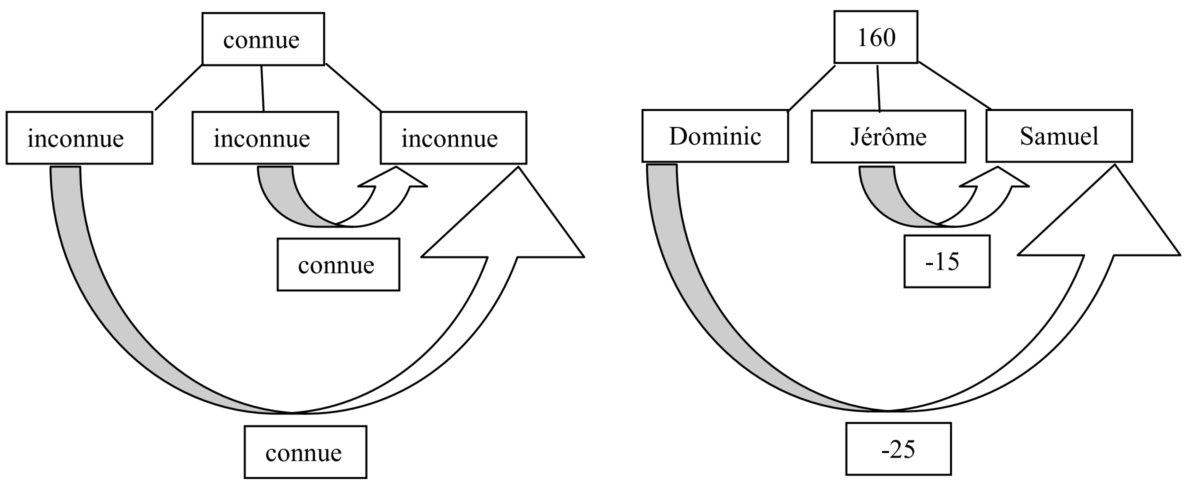


Figure 8 – Structure non connectée, enchaînement du type puits

Le premier type d'enchaînement utilisé par ces chercheuses est la structure du type composition de relations. L'élève doit déterminer l'inconnue d'origine à partir de laquelle une composition de relations (additive et/ou multiplicative) est appliquée pour déterminer respectivement la deuxième et la troisième inconnue de l'enchaînement. Par exemple, reprenons le problème présenté au chapitre 2 : « 380 students are registered in three sports activities offered during the season. Basketball has 3 times as many students as skating and swimming has 114 more students than basketball. How many students are registered in each of the activities? » (Bednarz & Janvier 1996, p.118). Dans cet exemple l'inconnue d'origine est le nombre d'élèves inscrits au *patinage*. L'inconnue nombre d'élèves inscrits au *basketball* et l'inconnue nombre d'élèves inscrits à la *natation* dépendent respectivement d'une relation multiplicative et additive par rapport à l'inconnue d'origine (voir figure 6, p.55).

Le deuxième type d'enchaînement utilisé par Oliveira & Câmara, (2010) est la structure du type source. Dans ce type de structure non connectée, l'élève doit identifier l'inconnue qui est la source à partir de laquelle, les deux autres inconnues sont générées. Par exemple, trois enfants jouent avec des petites voitures. Ils ont ensemble 27 petites voitures. Jérôme a 6 fois plus de petites voitures que Dominic. Samuel a 2 fois plus de petites voitures que Dominic. Combien chacun possède-t-il de petites voitures? (voir figure 7, p.56).

Le dernier type d'enchaînement utilisé par ces chercheuses est certainement le plus difficile pour les élèves. Il s'agit de la structure du type puits. Dans ce type de structure non connectée, l'élève doit déterminer l'inconnue à partir de laquelle les deux autres inconnues sont liées respectivement par une combinaison de relations additive et/ou multiplicative. Par exemple, prenons trois enfants qui échangent des cartes à collectionner. Ensemble, ils ont 160 cartes. Samuel possède 25 cartes de moins que Dominic et 15 cartes de moins que Jérôme. Combien de cartes à collectionner possède chaque enfant? (voir figure 8, p.56).

Dans un contexte du développement de la pensée analytique, nous soulignons l'importance de varier les types d'enchaînement et les relations qui relient les inconnues.

4.3 <u>Troisième question de recherche</u>

Notre travail de recherche nous a permis d'identifier des propositions didactiques qui nous semblent répondre adéquatement à la deuxième question de recherche. Au Québec, malgré l'abondante documentation de recherche sur la problématique, nous serions, semble-t-il, à nos premiers pas en ce qui concerne la conscientisation des origines du problème ainsi qu'à une réflexion sur nos pratiques actuelles (curriculum enseigné). Cet état de situation que nous percevons nous conduit à nous poser la troisième question de recherche suivante : Quels sont les moyens à privilégier pour permettre aux enseignants d'intégrer, dans leur pratique, les propositions didactiques favorisant le développement de la pensée algébrique?

4.3.1 Développement professionnel en cours de carrière

Kaput & Blanton (2000) émettent comme hypothèse qu'une part importante du problème de l'apprentissage de l'algèbre peut être résolue en adaptant les pratiques enseignantes dès le primaire. Ils constatent que les enseignants, qui ont apporté les ajustements souhaités au matériel traditionnel d'enseignement font émerger, chez leurs élèves, des réponses imprégnées du 1^er^ aspect considéré comme fondamental dans le développement de la pensée algébrique : l'algèbre comme processus de généralisation et de formalisation. Plus particulièrement, dans une classe de 3^e^ année du primaire, Kaput & Blanton (2005) présentent les résultats d'une expérimentation où l'enseignante a mis en place des moyens pour soutenir le développement du raisonnement algébrique chez ses élèves. Accompagnée par l'équipe de chercheurs, l'enseignante a développé des habiletés à dégager d'une tâche arithmétique proposée par le matériel d'enseignement traditionnel, des situations d'apprentissages qui favorisent le développement du raisonnement algébrique dans des contextes d'arithmétique généralisée et de raisonnement fonctionnel. Dans cette classe, les situations d'apprentissages étaient parfois planifiées et souvent spontanées lors de discussions avec les élèves. Kaput & Blanton (*Ibid.*) montrent que l'enseignante du primaire a su développer un regard et une écoute algébrique au travers un curriculum enseigné fortement imprégné d'une culture arithmétique en provenance des manuels scolaires que nous identifions comme une composante du curriculum souhaité. En insérant dans son enseignement des contextes d'arithmétiques généralisées et des contextes faisant appel au raisonnement fonctionnel, l'enseignante a mené ses élèves de 3^e^ année à réussir une épreuve standardisée destinée aux élèves de 4^e^ année du primaire.

> Results indicate that the teacher was able to integrate algebraic reasoning into instruction in planned and spontaneous ways that led to positive shifts in students' algebraic reasoning skills. […] increasing teachers' capacity to transform instructional materials in order to shift the focus of their practice from arithmetic to opportunities for pattern building, conjecturing, generalizing and justifying mathematical facts and relationships. […] Our approach was to group teachers across grade level and engage them in solving authentic mathematical tasks and reflecting on the algebraic character

> of these tasks and how they might play out mathematically and pedagogically in the classroom […] At the end of the academic year in which this study occurred, we conducted a quantitative analysis of students' performance on selected items of the fourth-grade Massachusetts Comprehensive Assessment System (MCAS), a state-wide, mandatory, standardized exam. […] the experimental third-grade class performed approximately as well as the fourth graders state-wide and significantly better than the district fourth graders. (*Ibid.*, p.412-435)

Cet exemple d'accompagnement réalisé par Kaput & Blanton (*Ibid.*) avec une enseignante de 3e année du primaire démontre à quel point le développement professionnel a une incidence sur la réussite scolaire des élèves. L'équipe de chercheurs et l'enseignante ont su mettre à profit deux composantes appartenant à la 11e compétence professionnelle : « Échanger des idées avec ses collègues quant à la pertinence de ses choix pédagogiques et didactiques […] Réfléchir sur sa pratique (analyse réflexive) et réinvestir les résultats de sa réflexion dans l'action » (MELS, 2001, p.126-127). L'analyse des résultats de notre recherche nous permet de remarquer qu'il existe une incidence entre le développement professionnel continu d'un enseignant et les difficultés liées au développement de la pensée algébrique chez les élèves. Selon les textes analysés, entre autres Mitchell & Koellner (2007), nous sommes en mesure de penser que l'insuffisance de développement professionnel est en partie responsable de l'existence des difficultés associées aux quatre facteurs récurrents décrits au chapitre précédent : le sens du symbole « = », le raisonnement algébrique, le sens de la lettre et les pratiques traditionnelles en enseignement de la mathématique. Nous établissons ce lien dans la conjoncture d'une transition d'ordre d'enseignement et en définissant le développement professionnel à partir de la 11e compétence du référentiel de compétences professionnelles de la profession enseignante (MELS, 2001). Nous soutenons également l'importance du développement professionnel continu chez les enseignants en nous appuyant sur l'avis récent émis par le Conseil supérieur de l'éducation (CSE, 2014). Cet avis fait mention d'initiatives inspirantes dans le domaine du développement professionnel chez les enseignants, mais révèle également la persistance de conditions qui ne le favorisent pas en milieu scolaire. Dans le même sens que Mitchell & Koellner (2007), le Conseil supérieur de l'éducation insiste sur la nécessité du développement professionnel et il établit un lien de cause à effet sur les apprentissages des élèves.

> Les quatre années de formation initiale des enseignantes et des enseignants ne peuvent préparer à toutes les situations rencontrées au cours de la vie professionnelle, d'où la nécessité, pour le personnel enseignant, de s'inscrire dans une démarche de développement professionnel tout au long de sa carrière. […] le Conseil est d'avis que soutenir le personnel enseignant dans sa démarche de développement professionnel peut influencer favorablement son engagement dans la profession en entraînant une maîtrise accrue sur sa pratique d'enseignement et sur l'apprentissage des élèves. (CSE, 2014, p.1)

C'est à partir du modèle proposé par Gueudet & Trouche (2007) que nous souhaitons opérationnaliser les moyens qui permettront aux enseignants d'intégrer dans leur pratique nos propositions didactiques. Nous souhaitons y parvenir en mettant en œuvre ce que ces deux chercheurs nomment : une genèse documentaire communautaire. Cette dernière a fait l'objet d'une description au chapitre 2. Cette mise en œuvre est soutenue par deux objectifs :

- construire une communauté de pratique;
- favoriser l'approche écologique.

Avant de présenter comment nous souhaitons opérationnaliser nos deux objectifs, il importe d'apporter quelques précisions conceptuelles sur la communauté de pratique et sur l'approche écologique. Notre communauté de pratique s'appuie sur les principes proposés par Wenger (2005). Selon ce chercheur, une communauté de pratique se caractérise par un regroupement de professionnels qui partagent une problématique commune et qui s'engagent, sur une base régulière, dans des activités d'échange de connaissance dans un but d'apprentissage professionnel. L'engagement réciproque des participants est également une caractéristique qui favorise la mise en place d'un contexte d'entraide à une compréhension commune des actions qui réduisent l'impact de la problématique. La dernière caractéristique que nous retenons pour la construction de notre communauté de pratique est la mise en place d'un répertoire partagé. Ce dernier constitue la genèse documentaire communautaire. C'est à partir de ce répertoire que la connaissance communautaire sur la problématique et les moyens pour en réduire les impacts évoluent dans le temps selon le modèle de Gueudet & Trouche (2007). Notre second objectif décrit la manière dont nous souhaitons mettre en place les moyens que nous avons identifiés dans ce chapitre. Selon nous, l'approche écologique permet de bonifier les curriculums souhaité (manuels scolaires) et enseigné (pratiques traditionnelles) que nous identifions comme des sources potentielles à la problématique de transition entre les raisonnements arithmétique et algébrique. Par l'approche écologique, nous souhaitons que les enseignants adoptent une posture semblable à l'exemple présenté au début de cette section. Pour Blanton & Kaput (2005), l'enseignante a su profiter des occasions, parfois planifiées et parfois non planifiées, pour bonifier les curriculums enseigné et souhaité. C'est avec le matériel traditionnel d'enseignement et un accompagnement par ces deux chercheurs que l'enseignante a développé un regard et une oreille algébrique.

La méthodologie que nous utilisons pour atteindre nos deux objectifs s'articule autour d'une collaboration entre des didacticiens d'universités québécoises, des conseillers pédagogiques et la direction des programmes pour la mathématique du ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. Le blogue constitue la structure pour notre communauté de pratique virtuelle dont l'intention consiste à favoriser le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Le répertoire commun, caractéristique importante d'une communauté de pratique, se situe sur le blogue. Ce dernier offre, entre autres, des informations conceptuelles sur les principes du développement de la pensée algébrique. Son répertoire commun est alimenté par des situations d'apprentissage significatives ciblant le développement de la pensée algébrique pour les deux ordres d'enseignement concernés. En choisissant la structure d'un blogue, nous offrons aux membres de la communauté l'opportunité de faire un retour sur l'expérimentation d'une situation d'apprentissage. Nous ajoutons également un forum d'échanges sur des sujets liés à l'intention de la communauté de pratique. Produite par les didacticiens et les conseillers pédagogiques, la synthèse des retours sur expérimentation pour une situation d'apprentissage ainsi que la bonification des informations conceptuelles engendrée par les échanges sur le forum constituent notre genèse documentaire communautaire. Elle est le reflet du développement professionnel des membres de notre communauté de pratique.

CONCLUSION

La description, l'analyse et l'interprétation des résultats de cette recherche nous permettent de penser que nous atteignons l'objectif de cet essai : élaborer une synthèse des écrits scientifiques portant sur les difficultés reliées au développement de la pensée algébrique ainsi que sur les propositions didactiques favorisant le développement de cette forme de pensée. Nous sommes en mesure de croire que notre recherche contribuera à résoudre la problématique que nous avons identifiée.

Nous croyons que la réduction des facteurs nuisibles au développement de la pensée algébrique passe inévitablement par le développement professionnel des enseignants dans un contexte de collaboration avec les didacticiens. Pour aider les élèves à franchir le nœud d'apprentissage qui existe entre les champs de l'arithmétique et de l'algèbre, l'enseignant doit adapter, dès le primaire, son approche avec l'arithmétique. Il doit accompagner les élèves à construire les savoirs arithmétiques à l'aide d'un regard et d'une écoute algébrique. Ce continuum, entre l'ordre d'enseignement primaire et le 1er cycle du secondaire, s'exécute en consolidant le sens des opérations sur les nombres avec des activités significatives tout en aidant l'élève à développer ses habiletés à généraliser et à opérer sur l'inconnue. Dans le contexte du développement des habiletés, il est nécessaire qu'une progression soit soutenue entre le langage naturel de l'élève et un langage plus formel. Nous considérons aussi qu'il est essentiel de le faire en respectant le curriculum souhaité et plus particulièrement le développement intégral de la seconde compétence disciplinaire pour les deux ordres d'enseignement : *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* et *Déployer un raisonnement mathématique*. Notre constat a cependant ses limites.

Comme le mentionne le Conseil supérieur de l'éducation dans un rapport récent, beaucoup d'efforts sont à faire pour soutenir et favoriser le développement professionnel des enseignants en milieu scolaire. La corrélation qui existe entre le développement professionnel et l'apprentissage des élèves n'est plus à démontrer. Les acteurs du milieu de l'éducation ont la responsabilité de trouver des solutions qui conviennent à leur organisation. Dans ce sens, il serait intéressant que les acteurs du milieu mettent en place des chantiers de travail dont les objectifs sont fortement inspirés du plan de réussite de l'école. Selon nous, il serait aussi pertinent qu'une trace plus significative du développement de la pensée algébrique soit laissée dans le Programme de formation de l'école québécoise. Au-delà de ces perspectives futures, nous souhaitons qu'il y ait une prise de conscience collective concernant la problématique qui a fait émerger cette recherche et qu'une réflexion s'engage au niveau provincial.

Sur le plan professionnel, comme conseiller pédagogique pour le dossier de la mathématique à la commission scolaire de la Capitale, notre recherche nous a permis d'identifier des facteurs qui font que la problématique existe. Notre recherche nous a permis également de nommer des pistes de travail qui permettront d'accompagner les enseignants dans la prise de conscience de la problématique et des moyens pour atténuer son effet négatif sur la réussite scolaire des élèves. Cette conscientisation s'est amorcée localement en 2010 dans le cadre d'un chantier 7 en collaboration avec des didacticiens de l'université de Sherbrooke et les commissions scolaires de la Capitale et de la Beauce-Etchemin. Toujours dans un contexte de développement professionnel, en 2013, nous avons participé à la mise en œuvre d'un chantier provincial sur la transition de l'arithmétique vers l'algèbre. Destiné aux conseillers pédagogiques des commissions scolaires du Québec, ce chantier se veut un puissant levier pour conscientiser à la problématique et surtout pour réfléchir sur les pratiques probantes qui favorisent le développement de la pensée algébrique.

Pour favoriser l'adhésion du milieu à cette nouvelle trajectoire sur le développement de la pensée mathématique, des présentations ont eu lieu et auront lieu lors des congrès destinés aux acteurs du milieu de l'éducation : 39^{e} congrès annuel de l'Association québécoise des troubles d'apprentissages-AQETA, mars 2014, 41^{e} session de perfectionnement du Groupe des responsables en mathématique au secondaire-GRMS, octobre 2014 et 27^{e} congrès de l'Association québécoise des enseignantes et des enseignants du primaire-AQEP, décembre 2014.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ahlgren, A. & Garfield, J. (1991). *Analysis of the probability curriculum. In R. Kapadia & M.Borovcnik (Eds), Chance Encounters:Probability in Education* (pp. 107-134). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Paris : Éditions du Seuil.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). *Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic*. in N. Bednarz, C. Kieran et *L. Lee* (Eds.) Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. *115-136).* Boston : Kluwer Academic Publishers.

Carraher, D. & al. (2001). *Can Young Students Operate on Unknowns?* Proceedings of the XXV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands (invited research forum paper), vol.1, p.130-140.

Carraher, D. & al. (2006). *Arithmetic and algebra in early mathematics education*. NCTM-Journal for research in mathematics education, vol.37, no.2

Chouinard, R. (2009). *Les transitions scolaires : un nouveau commencement ou le commencement de la fin ?* Conférence sur invitation. Rencontre annuelle des services administratifs et pédagogiques de la Commission scolaire de la Capitale. Montréal : Université de Montréal.

CSE (2014). *Le développement professionnel, un enrichissement pour toute la profession enseignante - sommaire*. Document accessible à l'adresse <http://www.cse.gouv.qc.ca/FR/Publications/index.html>.

Darley, J. (2009). *Traveling from arithmetic to algebra*. NCTM- Mathematics teaching in the middle school, vol.14, no.8, p.458.

Duchesne, S. & Ratelle, C. (2009). *Étude sur la transition, l'adaptation et la persévérance à l'école (ÉTAPE). Premier bilan des résultats, automne 2008.* Québec : Université Laval. Document accessible à l'adresse : <http://www.etape.fse.ulaval.ca/resultats>. Consulté le 17 octobre 2009.

Filloy, E., & Rojano, T (1984). *From an arithmetical to an algebraic thought*. In J. M. Moser (Ed.), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA (pp. 51-56). Madison: University of Wisconsin.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). *Solving equation: The transition form arithmetic to algebra. For tbe Learning of Mathematics,* volume 9, n. 2, pp. 19-25

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2010). *Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing unknowns*. NCTM- Journal for research in mathematics education, no.1, vol.41.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2007). *Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques.* In I. Bloch, F. Conne, F. Chellougui, G. Gueudet, M. Hersant, & E. Roditi (dir.), Actes de la XIV[e] École d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée sauvage.

Hart, K. (1981). *Secondary school children's understanding of mathematics.* London : Murray.

Jeannotte, D. (2005). *L'interprétation de la lettre et les erreurs commises en algèbre par des élèves du secondaire d'aujourd'hui et ceux de la fin des années 70 : une étude comparative*. Mémoire de maîtrise. Sherbrooke : université de Sherbrooke.

Jeannotte, D. (2012). *L'interprétation de la lettre en algèbre par des élèves du secondaire au Québec*. Canadian Journal for New Scholars in Education / Revue canadienne des jeunes chercheures et chercheurs en éducation. Avril 2012, vol.2, no.1

Kaput, J.J. & Blanton, M.L. (2000). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics : making it implementable on a massive scale*. Early algebra research. Dartmouth:University of Massachusetts.

Kaput, J.J. & Blanton M.L. (2005). *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning*. NCTM- Journal for research in mathematics education, vol.36, no.5

Kaput, J.J. & Blanton M.L. (2011). *Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades*. Dans Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, p.5– 23.

Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol*. Educational studies in mathematics. vol.12, no.3, p.317-326.

Kieran, C. (1992). *The learning and Teaching of School Algebra*. In D. A. Grouws (ed). The Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.390-419). MacMillan, New York.

Kieran, C. (2011). *Overall commentary on early algebraization : perspectives for research and teaching*. Dans Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, p.579 – 593.

Kinach, B.M. (2014). *Generalizing the core of algebraic thinking*. NCTM- Mathematics teacher, vol.107, no.6

Knuth, E.J. & al. (2008). *The importance of equal sign understanding in the middle grades*. NCTM- Mathematics teaching in the middle school, vol.13, no.9, p.514-519.

Küchemann, D. E. (1981). *Algebra*. Dans K. Hart (dir.), Children's understanding of mathematics (p. 11-16). London : Murray.

Labelle, H. (2008). *Les pratiques pédagogiques favorisant le développement de la pensée algébrique*. Mémoire, Chicoutimi : université du Québec à Chicoutimi.

Larose, F., Bédard, J., Boutet, M., Couturier, Y., Dezutter, O., Hasni, A., Kalubi, J-C., Lebrun, J., Lenoir, Y., Morin, M-P. (2006). *Le passage du primaire au secondaire : une transition à mieux soutenir. Résultats de recherche.* Sherbrooke : Université de Sherbrooke.

Laveault, D. (2006). *État de la question sur la transition élémentaire-secondaire*. Ontario : ministère de l'Éducation. Document accessible à l'adresse <http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/TransitionLiteraturef.pdf>. Consulté en novembre 2010.

Leavy, A. & al. (2013). *Early understanding of equality*. NCTM- Teaching children mathematics. vol.20, no.4, p.246

Lee, L. & Freiman, V. (2006). *Developing algebraic thinking through pattern exploration*. NCTM- Mathematics teaching in the middle school, vol.11, no.9, p.428

Lee, L, & Wheeler, D. (1989). *The arithmetic connection*. Educational Studies in Mathematics, 20, 41-54.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). *Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra : operating on the unknown in the context of equations*. Educational studies in mathematics. vol.30, no.1, p.39-65

Lins, R. C. (1992) *A Framework for Understanding what Algebraic ThinkingIs.* Doctoral dissertation, Nottingham : University of Nottingham.

Malisani, E. & Spagnolo, F. (2009). *From arithmetical thought to algebraic thought: the role of the variable*. Educational studies in mathematics. vol.71, no.1, p.19-41.

Mason, J. & al. (1994). *L'esprit mathématique*. Québec : Modulo Éditeur inc.

Mitchell J. Nathan & Karen Koellner (2007) *A Framework for Understanding and Cultivating the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning*, Mathematical Thinking and Learning, 9:3, 179-192, DOI: 10.1080/10986060701360852

MELS (2001). *La formation à l'enseignement. Les orientations - Les compétences professionnelles.* Document accessible à l'adresse <http://www.mels.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/publications/anterieur/formation_ens.pdf>.

MELS (2006a). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle. Décroche tes rêves,* Québec : Gouvernement du Québec. Document accessible à l'adresse : <http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/programme_de_formation/secondaire/prformsec1ercycle.htm>. Consulté en novembre 2010.

MELS (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et Enseignement primaire. Le virage du succès,* Québec : Gouvernement du Québec. Document accessible à l'adresse : <http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/primaire>. Consulté en juin 2014.

MELS (2009a). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle. Décroche tes rêves,* Québec : Gouvernement du Québec. Document accessible à l'adresse : <http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/medias/PFEQ_Mathematique.pdf>. Consulté en novembre 2010.

MELS (2009b). *Programme de formation de l'école québécoise. Progression des apprentissages au primaire. Mathématique,* Québec : Gouvernement du Québec. Document accessible à l'adresse : <http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionPrimaire/mathematique/>. Consulté en juin 2014.

MELS (2010). *Programme de formation de l'école québécoise. Progression des apprentissages au secondaire. Mathématique,* Québec : Gouvernement du Québec. Document accessible à l'adresse : <http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/secondaire/mathematique/>. Consulté en novembre 2010.

Ménard, J. & al. (2009). *Savoir pour pouvoir : Entreprendre un chantier national pour la persévérance scolaire,* Montréal : Rapport du Groupe d'action sur la persévérance et la réussite scolaires au Québec. Document accessible à l'adresse : <http://www.fcsq.qc.ca/accueil/quoideneuf/savoir_pouvoir.pdf>. Consulté en décembre 2010.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). *An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development*. Cognition and Instruction, 18, 209–237.

Nathan, M. J., & Petrosino, A. J. (2003). *Expert blind spot among preservice teachers*. American Educational Research Journal. 40, 905–928.

Oliveira, I. & Câmara, M. (2010). *Les stratégies utilisées par les élèves de la 5e année du primaire au 2e secondaire pour résoudre des problèmes de structure algébrique.* Copie de travail (ne pas diffuser). Québec : Université Laval.

Paillé, P. (2007). *La méthodologie de recherche dans un contexte de recherche professionnalisante : douze devis méthodologiques exemplaires*. Recherches qualitatives, vol. 27, n° 2, p. 133-151

Perry, C. & Cyrus, V. (2014). *Visualizing algebraic rules for the nth term*. NCTM-Mathematics teaching in the middle school, vol.19, no.7, p.443

Russell, S. & al. (2011). *Developing algebraic thinking in the context of arithmetic*. Dans Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, p.43 – 69.

Schmidt,S. (1996). *La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre*. Revue des sciences de l'éducation, vol.22, no2, p.277-294. Document accessible à l'adresse : <http://id.erudit.org/iderudit/031881ar>. Consulté le 28 septembre 2010

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions*. Education Studies in Mathematics (E.S.M.), 22, 1-36.

Squalli, H. (2000) *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.* Thèse de doctorat. Québec : Université Laval.

Squalli, H. (2004). *L'intervention auprès des élèves présentant des difficultés d'apprentissage en algèbre : état des connaissances et quelques pistes de réflexion*. Communication au congrès de l'Association québécoise sur les troubles d'apprentissages. Montréal, 26 mars 2004.

Squalli, H., Theis, L., Ducharme-Rivard, A., Cotnoir, G. (2007a). *Analyse des scénarios d'introduction de l'algèbre dans trois nouveaux manuels québécois du premier cycle du secondaire*. Journal de l'INRP. Document obtenu dans le cadre du cours DID855-Savoirs didactiques dans ma discipline, Université de Sherbrooke, Faculté de l'éducation, automne 2009.

Squalli, H. (2007b). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques*. Sherbrooke : université de Sherbrooke, faculté de l'éducation.

Squalli, H., Mary, C. (2012). 39e session de perfectionnement du Groupe des responsable en mathématique au secondaire - GRMS, St-Georges de Beauce, mai 2012

Tent, M. (2006). *Understanding the properties of arithmetic: a prerequisite for success in algebra*. NCTM- Mathematics teaching in the middle school, vol.12, no.1, p.22

Vergnaud, G., Benhadj, J., & Dussouet, A (1979). *La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le cours moyen 2e année et la classe de sixième*. Paris: Institut National de Recherche Pédagogique.

Vergnaud, G. (1996). *Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation.* In R. Noirfalise, M.-J. Perrin (dir.), École d'été de didactique des mathématiques (pp. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM, Université Clermont-Ferrand 2.

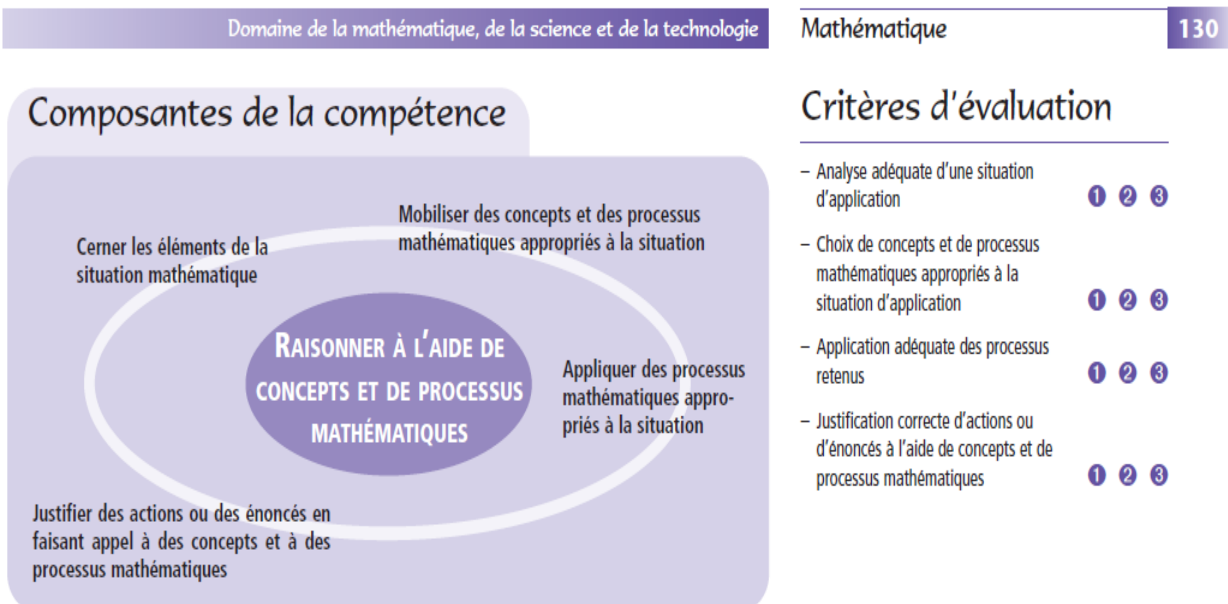
Vlassis, J. & Demonty, I. (1997). *Processus de raisonnement et enseignement de l'algèbre au premier degré du secondaire*. Informations Pédagogiques no 38 – Décembre 1997. Université de Liège, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation. Liège : Belgique. Document accessible à l'adresse : <http://www.restode.cfwb.be/ROOT/download/infoped/INFO38C.pdf>. Consulté le 2 octobre 2010.

Vlassis, J. & Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes : Au début du secondaire* (pp.15-29). De Boeck, Bruxelles. Document accessible à l'adresse : <http://books.google.ca/books?id=sPbeY5wjU5IC&lpg=PP1&hl=fr&pg=PA8#v=onepage&q&f=false>. Consulté en novembre 2010.

Wenger, E. (2005). *La théorie des communautés de pratique, apprentissage, sens et identité*. Traduction et adaptation Gervais, F. Québec : Les presses de l'Université Laval.

ANNEXE A
PROGRAMME DE FORMATION DE L'ÉCOLE QUÉBÉCOISE

Ordre d'enseignement primaire


Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie

Mathématique 130

Composantes de la compétence

Critères d'évaluation

- Analyse adéquate d'une situation d'application ❶ ❷ ❸
- Choix de concepts et de processus mathématiques appropriés à la situation d'application ❶ ❷ ❸
- Application adéquate des processus retenus ❶ ❷ ❸
- Justification correcte d'actions ou d'énoncés à l'aide de concepts et de processus mathématiques ❶ ❷ ❸

MELS, 2006b, p.130

Ordre d'enseignement secondaire

Compétence 2 et ses composantes

Former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques

Établir des liens structurés et fonctionnels entre des concepts et des processus • Dégager des lois, des règles et des propriétés • Mettre en relation différents réseaux de concepts et de processus • Recourir à différents modes de représentation • Coordonner les éléments du langage mathématique relatifs à ces réseaux

Établir des conjectures

Analyser les conditions d'une situation • Organiser des jugements mathématiques • Former une opinion probable ou vraisemblable • S'approprier ou énoncer des conjectures adaptées à la situation • Apprécier la pertinence des conjectures retenues

Réaliser des démonstrations ou des preuves

Choisir un mode de représentation • Utiliser les moyens propres au mode retenu • Recourir, au besoin, à des contre-exemples pour préciser, réajuster ou réfuter des conjectures • Mettre en forme les résultats de sa démarche • Reprendre l'exercice, au besoin

Critères d'évaluation

– Formulation d'une conjecture appropriée à la situation[6]
– Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation[7]
– Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique[8] adapté à la situation
– Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente
– Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente

6. La situation à laquelle on fait allusion est décrite au dernier paragraphe de la page 243.

7. *Idem.*

8. Par *raisonnement mathématique*, on entend un raisonnement par analogie, par induction, par déduction et un raisonnement proportionnel, algébrique, géométrique, arithmétique, probabiliste ou statistique.

Attentes de fin de cycle

À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève est en mesure de faire appel aux différents modes de pensée mathématique afin de cerner une situation et d'émettre des conjectures. Il met à profit les concepts et les processus appropriés à la situation et expérimente différentes pistes pour confirmer ou réfuter ses conjectures. Il les valide soit en appuyant chaque étape de sa solution sur des concepts, des processus, des règles ou des énoncés, qu'il exprime de façon structurée, soit en fournissant des contre-exemples.

Le déploiement d'un raisonnement mathématique nécessite, entre autres, la mobilisation de concepts et de processus propres à chaque champ mathématique.

- En arithmétique, l'élève sollicite son sens du nombre et des opérations et utilise l'équivalence de nombres ou d'expressions numériques. Il effectue des opérations sur les nombres et a recours aux concepts de rapport, de taux, de proportion ainsi qu'aux stratégies multiplicatives, entre autres lorsqu'il s'agit de conjectures portant sur des situations de proportionnalité.
- En algèbre, il interprète, construit et manipule des expressions algébriques.
- En probabilité, il exploite les concepts de dénombrement et d'événement afin de calculer des probabilités.
- En statistique, il traite des données, c'est-à-dire qu'il organise, représente et analyse un ou plusieurs éléments d'un sondage.
- En géométrie, il procède par des déductions simples à partir de définitions et de propriétés, par exemple pour déterminer la valeur de mesures manquantes.

245
Chapitre 6

Programme de formation de l'école québécoise — *Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie* — *Mathématique*

MELS, 2006a, p.245

Progression des apprentissages Secondaire	Progression des apprentissages Primaire	Porter attention
Algèbre		

Progression des apprentissages Secondaire	Progression des apprentissages Primaire	Porter attention
p. 14, n° A-5 Construire une expression algébrique à partir d'un registre (mode) de représentation	p. 9 nos A-2 et A-3, p. 10 nos B-1, B-2, et C-1 Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou d'équations et vice versa (exploitation des différents sens de...) p. 9 n° A-6 et p. 10 n° B-4 Traduire une situation à l'aide d'une chaîne d'opérations en respectant la priorité des opérations p. 12, n° 13 a, b et c Décrire, dans ses mots et à l'aide du langage mathématique propre à son cycle, a. des régularités non numériques (ex. : suite de couleurs, de formes, de sons, de gestes) b. des régularités numériques (ex. : comptines des nombres, tableaux et grilles de nombres) c. des suites de nombres et familles d'opérations p. 12, n° A-14 Ajouter de nouveaux termes à une suite dont au moins les 3 premiers termes sont donnés	Primaire • L'élève est capable de traduire une situation en utilisant un mode de représentation non algébrique (voir l'annexe D du Programme de mathématique du 2e cycle du secondaire). • L'élève est capable de trouver un terme dans une suite, d'en expliquer la règle, mais il ne sait pas comment la représenter par une expression algébrique. Il fait de l'algèbre intuitivement, à son insu. Secondaire • L'élève passe de la pensée arithmétique à la pensée algébrique.
p. 16, n° C-7 Transformer des égalités arithmétiques et des équations pour en conserver l'équivalence (propriétés et règles de transformations) et justifier les étapes suivies, au besoin	p.9, n° A-5 Déterminer des équivalences numériques à l'aide de relations entre c. les opérations (4 opérations), la commutativité de l'addition et de la multiplication, l'associativité et la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction	Primaire • L'élève est capable de déterminer des équivalences numériques, lui permettant ainsi de mettre en place les « concepts » d'égalité et d'équivalence. Secondaire • L'élève passe de la pensée arithmétique à la pensée algébrique.

Équipe des programmes de mathématique   Document de travail - tableau primaire-secondaire   Algèbre

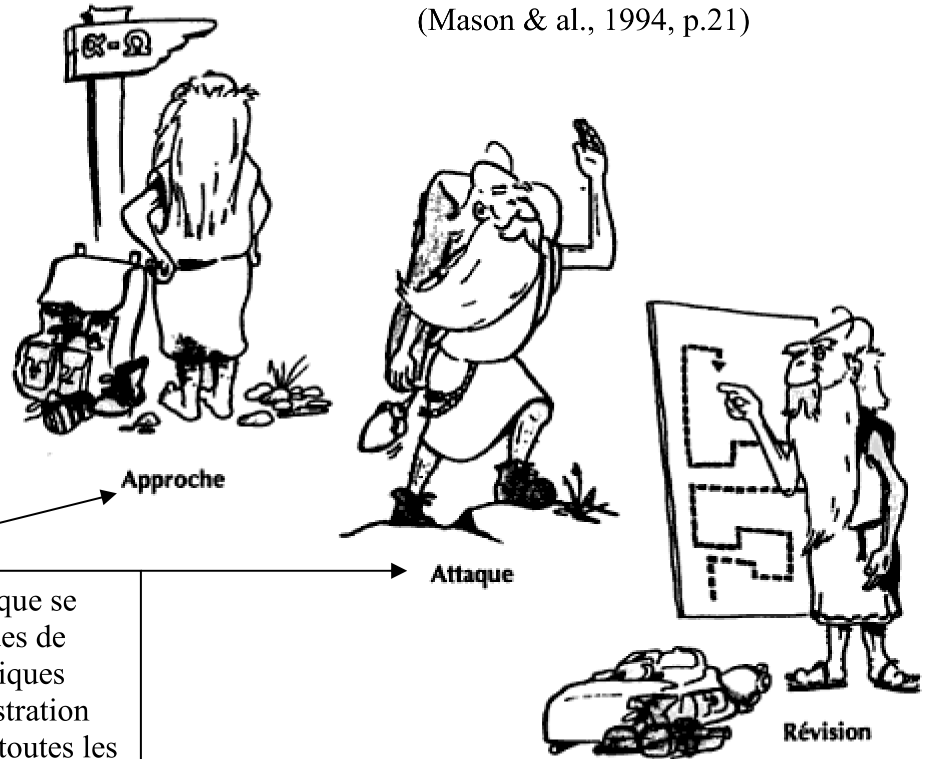
MELS, 2009b, p.9 &10 et MELS, 2010, p.14

ANNEXE B

MODÈLE POUR LA GÉNÉRALISATION MATHÉMATIQUE

Il faut reconnaître l'importance de la phase d'approche. Plusieurs personnes lisent l'énoncé d'un problème une ou deux fois, puis veulent filer tout droit vers la solution. […] L'approche commence dès qu'on prend connaissance du problème. […] Le meilleur conseil dans la phase d'approche est donc : lisez véritablement l'énoncé! […] le travail de la phase d'approche consiste principalement à formuler le problème précisément et à décider de ce qu'on veut. […] Il faut saisir le problème de deux façons : en absorbant les données fournies et en déterminant ce qu'il faut trouver. […] D'où l'importance de structurer le travail de la phase d'approche en répondant aux trois questions : Qu'est-ce que je sais ?; Qu'est-ce que je veux?; Qu'est-ce que je peux introduire? (Mason & al., 1994, p.23)

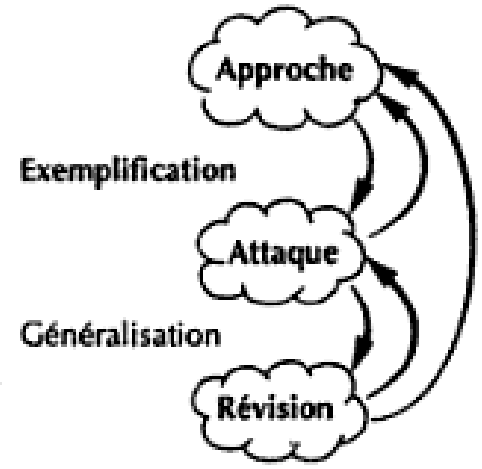
(Mason & al., 1994, p.21)



Une fois le problème bien compris et assimilé, attaquez-le. L'attaque se termine par l'abandon ou la résolution. Les activités mathématiques de l'attaque sont complexes et variées. […] Les processus mathématiques fondamentaux utilisés sont l'émission de conjectures et la démonstration convaincante. […] Un long temps s'école parfois entre l'essai de toutes les idées et une nouvelle compréhension du problème ou la découverte d'une nouvelle méthode. (Mason & al., 1994, p.31)

Révisez votre travail une fois le problème raisonnablement résolu ou lorsque vous avez envie d'abandonner la partie. Trouvez comment améliorer et élargir vos raisonnements. Essayez d'étendre votre solution à une situation plus générale. **Vérifiez** votre travail et **réfléchissez** sur les éléments clés. **Étendez** les processus et les résultats à une situation plus large. […] Ces trois mots structurent la révision, qui consiste à : vérifier la solution; réfléchir aux idées clés et aux moments clés; étendre le raisonnement à une situation plus large. (Mason & al., 1994, p.31)

l’exemplification, consiste à étudier un problème à l’aide d’exemples. […] Les exemples choisis sont des cas particuliers du problème. […] Si vous bloquez sur un problème, posez-vous les questions : « Et si j’essayais un exemple? » et «Que se passe-t-il dans tel cas particulier? » (Mason & al., 1994, p.3) […] le choix au hasard d’exemples nous éclaire sur la nature d’un problème et permet de voir si une proposition est vraisemblable, mais **une mathématisation** plus poussée (systémique) révèle plus sûrement le cheminement » (Mason & al., 1994, p.5) […] Exemplifier, c’est choisir des exemples : **au hasard**, pour avoir une idée du problème; **systématiquement**, pour préparer le terrain à une généralisation; **astucieusement**, pour tester une généralisation (Mason & al., 1994, p.19)



(Mason & al., 1994, p.22)

Généraliser, un impératif, c’est tirer des conclusion valables pour tous les cas à partir de quelques exemples. **La généralisation**, c’est l’âme des mathématiques. Les résultats particuliers sont utiles dans des cas particuliers. La proposition mathématique est générale : elle s’applique à tous les cas (Mason & al., 1994, p.7) […] Généraliser, c’est découvrir un cheminement qui conduit : à ce qui semble vraisemblable **(une conjecture)**; au pourquoi cela semble vraisemblable **(une démonstration)**; là où cela semble vraisemblable, c’est-à-dire à un énoncé plus général du problème (Mason & al., 1994, p.19)

ANNEXE C

11e COMPÉTENCE PROFESSIONNELLE

Tableau synthèse

COMPÉTENCE N° 11

S'engager dans une démarche individuelle et collective de développement professionnel.

COMPOSANTES

- Établir un bilan de ses compétences et mettre en œuvre les moyens pour les développer en utilisant les ressources disponibles.
- Échanger des idées avec ses collègues quant à la pertinence de ses choix pédagogiques et didactiques.
- Réfléchir sur sa pratique (analyse réflexive) et réinvestir les résultats de sa réflexion dans l'action.
- Mener des projets pédagogiques pour résoudre des problèmes d'enseignement.
- Faire participer ses pairs à des démarches de recherche liées à la maîtrise des compétences visées dans le programme de formation et aux objectifs éducatifs de l'école.

NIVEAU DE MAÎTRISE ATTENDU

Au terme de la formation initiale, l'étudiante ou l'étudiant doit être en mesure :

- de repérer, de comprendre et d'utiliser les ressources (littérature de recherche et littérature professionnelle, réseaux pédagogiques, associations professionnelles, banques de données) disponibles sur l'enseignement;
- de préciser ses forces et ses limites, ainsi que ses objectifs personnels et les moyens pour y arriver;
- de mener une démarche d'analyse réflexive de manière rigoureuse sur des aspects précis de son enseignement;
- d'entreprendre des projets de recherche sur des aspects ciblés de son enseignement.

157

MELS, 2001, p.157

ANNEXE D

LISTE DES MOTS CLÉS ET DES AUTEURS

mots clés anglais	mots clés français
algebra	algèbre
algebraic generalizations	approche langage
algebraic notation	approche structure
algebraic patterns	calcul algébrique
algebraic reasoning	calcul fonctionnel
algebraic representations	calcul formel
algebraic thinking	compétence algébrique
algebraic thought	conception opérationnelle
algebraic transformations	conception procédurale
arithmetic reasoning	conception structurale
balancing act	de l'inconnue vers le connu
children's understanding	démarche algébrique
conceptual development	démarche arithmétique
connected problem	dimension sémiotique
disconnected problem	du connu vers le connu
didactic cut	expression algébrique
early algebra	inconnue
extension of arithmetic	langage algébrique
generalizations	lettre évaluée
generalizing	lettre ignorée
mathematical learning	lettre objet
mathematical thinking	méthode algébrique
mathematical understanding	méthode arithmétique
mathematical unknown	nœud d'apprentissage
one unknown equation	nombre généralisé
operate on unknowns	obstacle épistémologique
operating on the unknown	pensée algébrique
operational conceptions	procédure algébrique
pattern generalization	problème connecté
pre-algebra concepts	problème déconnecté
problem-solving	procédure arithmétique
progressively formalizing	raisonnement algébrique
reasoning and proof	raisonnement arithmétique
semiotics	relation d'égalité
single unknown	résolution algébrique
structural conceptions	résolution arithmétique
student thinking	sens de la lettre
symbolic system of algebra	sens du symbole égal
teaching practice	stade algébrique
unknown	stade arithmétique
unknown quantities	structure syntaxique
visual growth patterns	symbole d'équivalence
	symbolisation
	termes littéraux
	transition arithmétique-algèbre
	variable

auteurs	
Artigue, M. **Azarello, F.** **Bednarz, N.** Baker, D. **Bishop, J.** **Blanton, M.L.** Booth, L.R. **Brizuela, B.M.** **Carpenter, T.P.** **Carraher, D.** Chevallard, Y. Combier, G. Cooper, T. Daneau,C. Demonty, I. Drouhard, J.P. El.Jurdak, M.E. **Filloy, E.** Grugeon,B. Guillaume, J.C. Irwin, K.C. Janvier,B. Jeannotte, D.	**Kaput, J.J.** **Kieran, C.** Knuth, E. Küchemann, D. Lannin, J. Liljedahl, P. **Mason, J.** Marchand,P. Mouhayar, R.R. Murray, S.B. Pressiat, A. **Radford, L.** **Rojano, T.** **Rojas, A.S.** **Schliemann, A.D.** Schmidt, S. Sfard, A. Solares, A. **Squalli, H.** Tall, D. Theis, L. Thivierge-Ayotte, L. Thomas, M. Vergnaud, G. Vlassis, J. **Warren, E.** Zazkis, R.
liens internet - intéressant	
balance algébrique : http://www.borenson.com/tabid/1124/Default.aspx sens du nombre et opérations \ algèbre : http://nlvm.usu.edu/fr/nav/vlibrary.html	

ANNEXE E

GRILLE D'ANALYSE

Référence bibliographique : #...

Auteur…

Transition arithmétique – algèbre : une recherche documentaire

Quelles sont les difficultés répertoriées dans les écrits en rapport avec le développement de la pensée algébrique dans un contexte de continuité entre le 3e cycle du primaire et le 1er cycle du secondaire?

Quelles sont les propositions didactiques favorisant le développement de la pensée algébrique dans un contexte de continuité entre le 3e cycle du primaire et le 1er cycle du secondaire?

Grille d'analyse de la documentation portant sur la pensée algébrique

Dans le cadre du projet d'essai supervisé par M. Hassane Squalli

(PRS 802)

Préparée par :
Martin Baril

version : 11 février 2014

A. Caractéristiques de l'écrit

1. Contexte de réalisation de la recherche (s'il y a lieu) **:**

---

2. Type de document analysé:

Texte fondateur	☐
Texte soutenu par un ou des textes fondateurs	☐
Livre	☐
Chapitre de livre	☐
Actes de colloque	☐
Rapport	☐
Mémoire	☐
Thèse	☐
Autre (précisez)	☐

3. Niveau scolaire considéré

Primaire	☐
Secondaire	☐
Autre (précisez)	☐

Commentaires personnels

B. Difficultés liées aux concepts associées au développement de la pensée algébrique

4. Traitement par l'auteur

4.1-Le sens du symbole « = »

Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐

Difficultés nommées par l'auteur, citation (s)

4.2-Le sens de la lettre – inconnue/variable/paramètre/constante

Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐

Difficultés nommées par l'auteur, citation (s)

4.3-La conception procédurale/la conception structurale

Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐

Difficultés nommées par l'auteur, citation (s)

Commentaires personnels

C. Difficultés liées au développement de la pensée algébrique

5. Traitement par l'auteur

5.1-Opérer sur l'inconnue : Absent☐ Explicitement☐ À travers le texte☐
Difficultés nommées par l'auteur, citation (s)

5.2-Généraliser, citation (s) : Absent☐ Explicitement☐ À travers le texte☐
Difficultés nommées par l'auteur, citation(s)

5.3-Autres composantes, citation (s) : Absent☐ Explicitement☐ À travers le texte☐
Difficultés nommées par l'auteur, citation (s)

Commentaires personnels

D. Propositions didactiques

6. Traitement par l'auteur

6.1 Le sens du symbole « = »
Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐
Approches nommées par l'auteur, citation (s)

6.2 Le sens de la lettre – inconnue/variable/paramètre/constante
Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐
Approches nommées par l'auteur, citation (s)

6.3 La conception procédurale/la conception structurale
Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐
Approches nommées par l'auteur, citation (s)

6.4 Opérer sur l'inconnue
Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐
Approches nommées par l'auteur, citation (s)

6.5 Généraliser
Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐
Approches nommées par l'auteur, citation (s)

6.6 Autres composantes de la pensée algébrique

Absent ☐ Explicitement ☐ À travers le texte ☐

Approches nommées par l'auteur, citation (s)

Commentaires personnels

E. INFORMATIONS SUR LE VOLET EMPIRIQUE DE LA RECHERCHE

7.1 Objectif (s) ou question (s) de la recherche énoncé(s) (s'il y a lieu)

Non énoncés ☐ Énoncés explicitement ☐ À travers le texte ☐

Lesquels (s'il y a lieu)?

7.2 Angle sous lequel est abordée la recherche (ex. pratiques d'enseignement, apprentissages des élèves, conceptions des élèves ou des enseignants, manuels scolaires)

7.3 Échantillon (s'il y a lieu)

Précisé ☐ Non précisé ☐

Précisez

7.4 Principaux résultats obtenus

Commentaires personnels

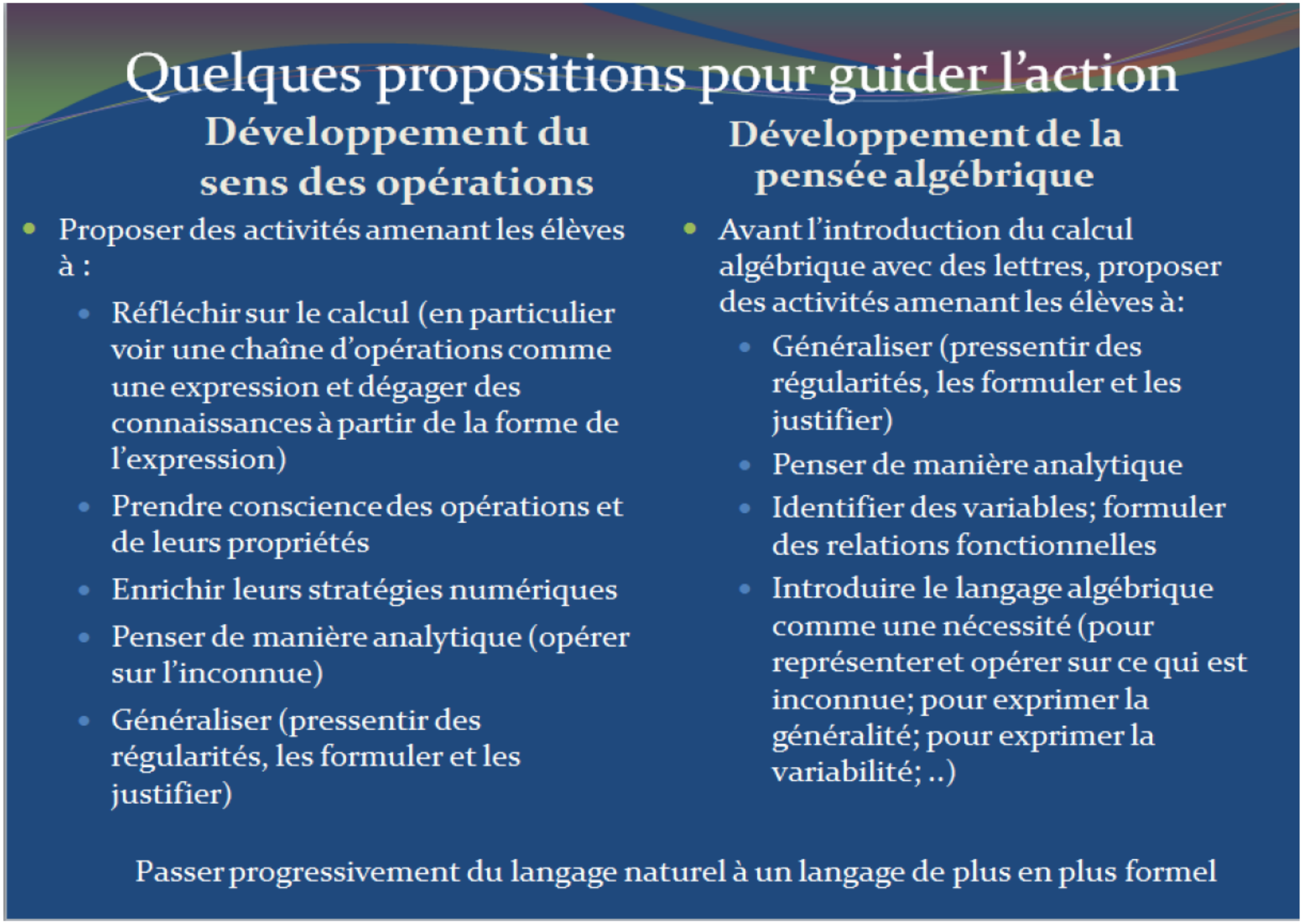
F. SYNTHÈSE

8. Résumé (10 lignes max)

Commentaires personnels

ANNEXE F

PROPOSITIONS POUR GUIDER L'ACTION



Quelques propositions pour guider l'action
Développement du sens des opérations
Proposer des activités amenant les élèves à :
Réfléchir sur le calcul (en particulier voir une chaîne d'opérations comme une expression et dégager des connaissances à partir de la forme de l'expression)
Prendre conscience des opérations et de leurs propriétés
Enrichir leurs stratégies numériques
Penser de manière analytique (opérer sur l'inconnue)
Généraliser (pressentir des régularités, les formuler et les justifier)
Développement de la pensée algébrique
Avant l'introduction du calcul algébrique avec des lettres, proposer des activités amenant les élèves à:
Généraliser (pressentir des régularités, les formuler et les justifier)
Penser de manière analytique
Identifier des variables; formuler des relations fonctionnelles
Introduire le langage algébrique comme une nécessité (pour représenter et opérer sur ce qui est inconnue; pour exprimer la généralité; pour exprimer la variabilité; ..)
Passer progressivement du langage naturel à un langage de plus en plus formel

ANNEXE G

ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

selon Russell & al., 2011, p.46-66

1- Comprendre le comportement des opérations arithmétiques

(2^e année du primaire, la commutativité) – Les élèves constatent qu'en inversant les opérandes dans l'opération d'addition, le résultat demeure le même. L'exercice se poursuit en identifiant 2 opérandes qui additionnées ensemble donnent 25. Parmi toutes les opérandes trouvées, plusieurs se répètent, mais inversées : 23+2, 2+23…Donc il est permis d'affirmer que 23+2=2+23, peut-on affirmer que cela fonctionne pour toutes les opérandes, par exemple 175+266 et 266+175 ?

(réponse d'un élève) – If you change the order, nothing more is added and nothing is taken away, so the total stays the same.

Maintenant est-ce que ça fonctionne pour toutes les opérations ? Est-ce que 7-3 égale 3-7 ?

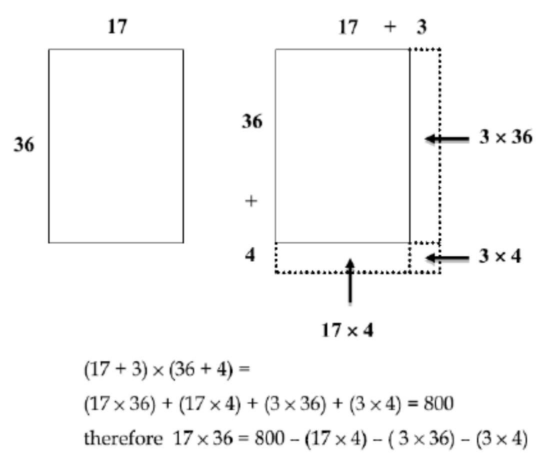
(réponse d'un élève) – You could only take away 3, to make 0.

This reasoning was sufficient to convince students that $7-3 \neq 3-7$, and that the commutative property applies to addition, but not to subtraction, which was the teacher's purpose for this part of the lesson. […] This teacher took the opportunity to make this regularity an explicit focus of investigation. She challenged her students to think about whether changing the order of the addends maintains the sum only for specific cases or whether it is true more generally and to explain how they knew […] By presenting a contrasting case of subtraction, she checked to make sure they understood that their generalization applied specifically to the operation of addition.

(3^e cycle du primaire et 1^er cycle du secondaire, la distributivité) – Les élèves doivent estimer 17×36 et expliquer leur raisonnement.

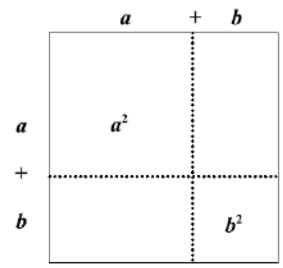
(réponse d'un élève, Thomas) – I round 17 to 20 and 36 to 40. I know that 20 × 40 is 800. Then I need to subtract the extra 3 (from rounding 17 to 20) and the extra 4 (from rounding 36 to 40). 800 − 3 − 4 = 793. The answer is 793.

Ce raisonnement fréquent s'applique pour l'addition, mais pas pour la multiplication. Pour déconstruire le raisonnement, il s'agit de l'analyser avec les dispositions



rectangulaires, les aires ou les tuiles algébriques.

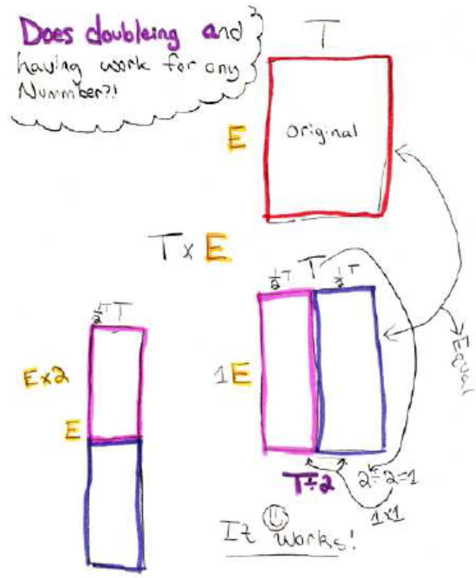
This analysis requires representing the operation of multiplication in a way that manifests the distributive property (which may be hidden from students by some of the algorithms they use) […] Thomas's error is similar to the reasoning they might engage in to justify why $(a + b)^2$ is not equal to $a^2 + b^2$. Their understanding of the distributive property can be explicitly called upon, so that they can visualize that $(a + b)^2$ cannot possibly be equivalent to $a^2 + b^2$ unless a or b is equal to 0.



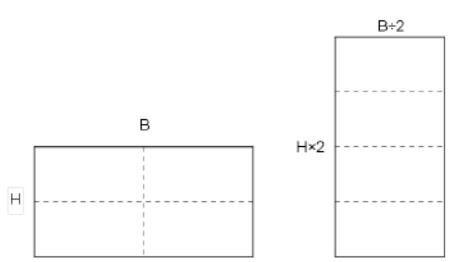
2-Généraliser et justifier des situations arithmétiques

<u>(6e année du primaire)</u> – Lorsque je multiplie deux nombres naturels, j'obtiens un produit. Si je double le premier opérande et que je réduis de moitié le second opérande, est-ce que j'obtiens le même produit? Les élèves doivent le démontrer avec un dessin sans faire de calculs arithmétiques.

(réponse d'un élève) – In their rectangle marked "original," they represent the multiplication, T ×E, as the area of a rectangle with sides of lengths T and E. In the second picture, they have cut the rectangle in half and show ½T as a side equal in length to half of T . The same area (T ×E) is equal to two rectangles, each with area (½T ×E). By moving one of the smaller rectangles below the other, as shown in the third picture, they now have a rectangle with sides ½T and 2E. Since its area (½T × 2E) is equal to the area of the original rectangle, they have shown that ½T ×2E = T ×E.



?
?
?
?
?

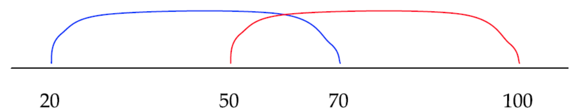


Notre interprétation

3-Étendre le domaine des nombres

(5e année du primaire) – Lorsque nous soustrayons deux nombres naturels, nous obtenons une différence. Est-ce que cette différence demeure la même lorsque je soustrais la même quantité aux 2 nombres naturels (100-50 et 70-20)?

(réponse d'un élève) – You can see that the distance is the same. If you change one number, you change the other the same way.



As long as both numbers change the same, you can make lots of new expressions.

Donc la différence demeure la même pour 100-50, 90-40, 80-30, 70-20, 60-10 et 50-0. Que se passe-t-il après 50-0 ?

(réponse d'un élève) – But we could use the other numbers. The negative numbers on the other side of zero.

Donc 40-(-10), 30-(-20)…possèdent la même différence ?

(réponse d'un élève) – He applied what he understood about the relationship between addition and subtraction, as well as the image of "distance between" on the number line, to argue that 40 − (−10) must equal 50.

Alors 40-(-10)=50 car (-10)+50=40, déjà vu avec l'addition. Donc si a+b=c alors c-a=b pour tous les nombres entiers.

(6e année du primaire) – Les élèves comprennent que ½T × 2E = T × E avec les nombres naturels. Sans faire de calcul, demander aux élèves de compléter le tableau des opérations suivantes :

$25 \times 1 = 2.5 \times 10$
$25 \times 10 = 2.5 \times$ ____
$25 \times 100 = .25 \times$ ____
$25 \times .1 = 2.5 \times$ ____
$25 \times .01 = .25 \times$ ____

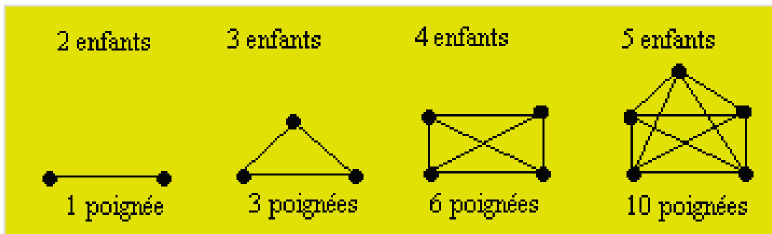
*(réponse de trois élèves) – **Britta**: This is like the problems we did before but A is divided by ten and B is multiplied by ten.* […] ***Fran**: It's not just about the decimal point, it's about multiplying and dividing the numbers.* […] *Britta suggested that A×B = 2A×½B, and George suggested that A×B = AC ×B/C.*

ANNEXE H

STRATÉGIES DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME DES POIGNÉES DE MAINS

Raisonnements d'élèves (3e cycle primaire, 1er cycle secondaire)[3]

Stratégie de représentation : On trouve le nombre de poignées successivement pour 2, 3, 4 et 5 enfants.



La différence entre le nombre de poignées du 2e diagramme et du 1er est 2. La différence entre le nombre du 3e diagramme et du 2e est 3. La différence entre le nombre du 4e diagramme et du 3e est 4. À chaque fois qu'un enfant s'ajoute, le nombre de poignées augmente du nombre d'enfants du cas précédent. D'où, les autres termes de la suite seront : 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66. Il y a 66 poignées de mains.

Stratégie de recherche d'une formule : Par exemple, il y a 3 enfants. Chaque enfant donne et reçoit 2 poignées : ce qui fait (3 × 2). Cependant, quand un enfant donne et l'autre reçoit, cela compte pour une poignée. Le nombre de poignées est 2 fois trop grand. Donc (3 × 2)/2 ou 3 poignées. Par exemple, il y a 4 enfants. Cela fait (4 × 3)/2 ou 6 poignées. Par exemple, il y a 6 enfants. Cela fait (6 × 5)/2 ou 15 poignées. S'il y a 12 enfants, on peut écrire (12 × 11)/2 ou 66 poignées. On pose qu'il y a n enfants. Chacun donne $(n - 1)$ poignées de mains. Cela va donner $n(n - 1)$ poignées. Quand un enfant donne et l'autre reçoit, cela compte pour une poignée. Le nombre de poignées est 2 fois trop grand. D'où, il y a $n(n - 1)/2$ poignées.

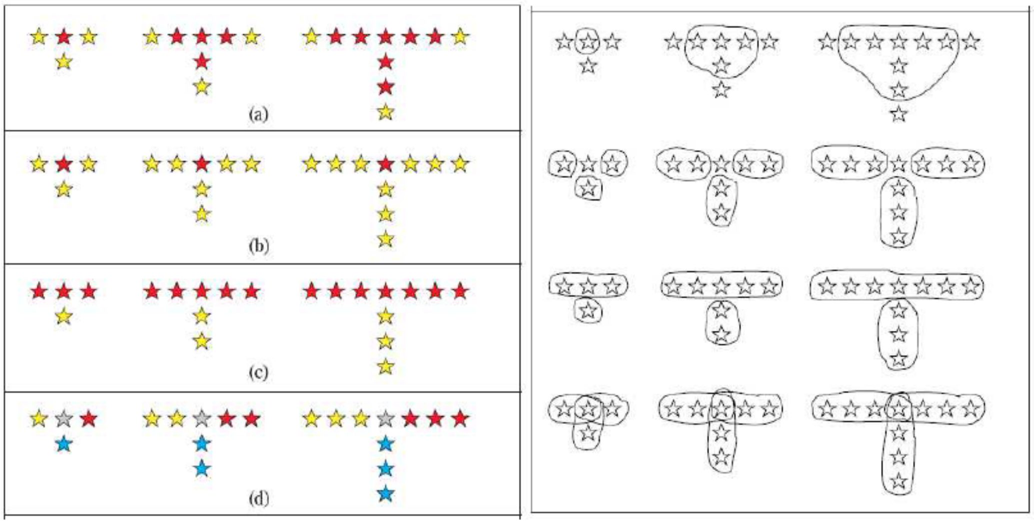
[3] Récréomath, Lexique de résolution de problèmes, http://www.recreomath.qc.ca/lex_mains_poignees.htm

ANNEXE I

DÉVELOPPER LE RAISONNEMENT FONCTIONNEL

selon Lee & Freiman, 2006, p.430-433

1re question : in which of these drawings can you see a pattern?



2e question : How many different patterns can you see in this drawing?

This step is crucial in using patterns to develop rich algebraic thinking. It also leads to multiple expressions of the same pattern, thereby opening the door to dealing with equivalent expressions and symbolic manipulation.

- How do you draw the 10th figure?
- How would you draw the 58th figure?
- How would you tell someone how to draw any figure at all?
- How would you restate that description if I tell you that the figure is the nth?

3e question : I have a box of twenty-five stars. How big a T could I make? Would I have some stars left over?

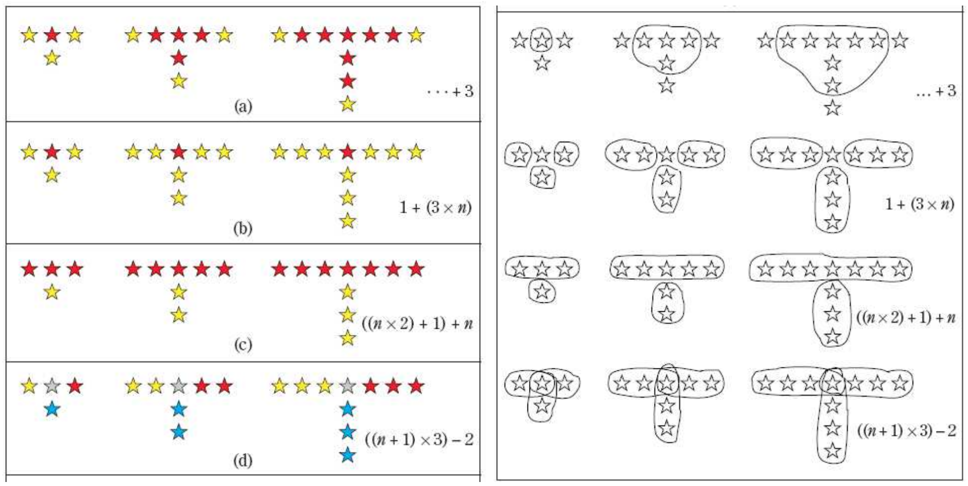
For instance, a student or group of students who count the stars in the 4th T (getting thirteen) may use inappropriate proportional reasoning to decide that the 8th T would have twice as many stars (twenty-six). They might also conclude that there would be a star missing for the 8th form and, therefore, the biggest complete star would be the 7th.

4e question : How many stars does it take to make the 10th, the 58th, or the 100th figure?

Now that attention is focused on the number of stars in the T shapes, students can be encouraged to use several of the pattern perceptions to answer these questions and, finally, to give a rule for how many stars are in any given T shape.

5^e question : How many stars does it take to make the n th figure?

Their written expressions will probably not respect convention and may contain some words. However, the important thing at this point is to elicit attempts at symbolic writing that allow the students to communicate their different ways of expressing their "seeings" and "sayings" and to come to some agreement on the meaning of each.



6^e question : Which of the expressions for the n th shape is a "right" one?

Students will want to know how all these different-looking expressions can be correct. This situation opens the door for introducing equivalence of expressions. How, for example, can $1 + (3 \times n)$; $((n \times 2) + 1) + n$; and $((n + 1) \times 3) - 2$ all be equivalent to one another? […] *The symbolic manipulation can be launched by asking students to think about how natural numbers behave when we operate on them (commutativity, associativity, distributivity) and to apply this knowledge to show that each expression is equivalent to $3n + 1$. Some conventions may be introduced as the work progresses (such as $2n$ for $n + n$ or $n \times 2$, the use of brackets to keep parts of expressions together, etc.)* […] *students might be given other expressions and asked to verify their equivalence to $3n + 1$ and to determine to what pattern perception they might correspond. For example, $(1 + (n \times 4)) - n$ might be seen as a cross with the top removed or as a central dot with four arms from which the top arm of n stars is removed.*

7^e question : Which figure has exactly one hundred stars in it?

*Here it is used to shift to the use of the **letter as an unknown** and the resultant activity of solving equations. The question here is this: "For what n can any of these equivalent expressions equal one hundred?"*

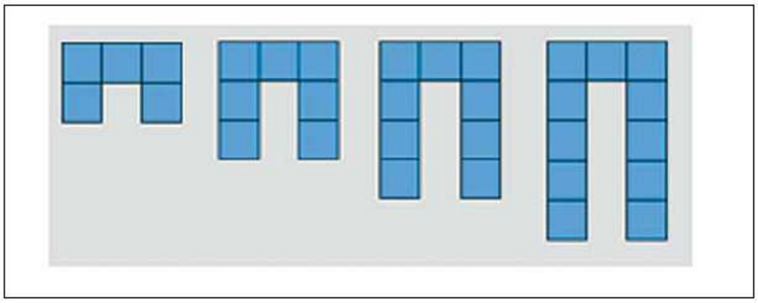
8^e question : How many interesting pattern problems can you create for the rest of the class?

ANNEXE J

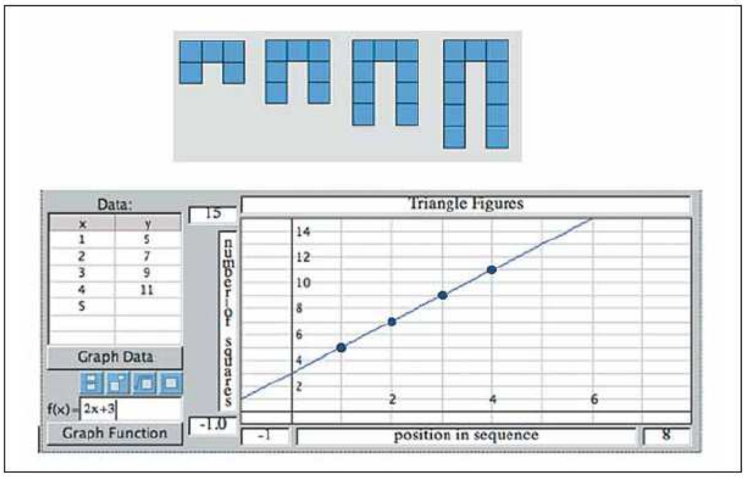
DÉVELOPPER LE RAISONNEMENT FONCTIONNEL

selon Kinach, 2014, p.434-437

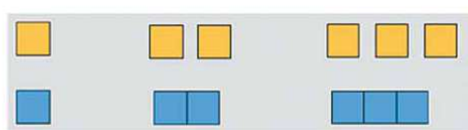
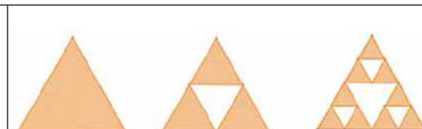
Généralisation par analogie



Généralisation par extension

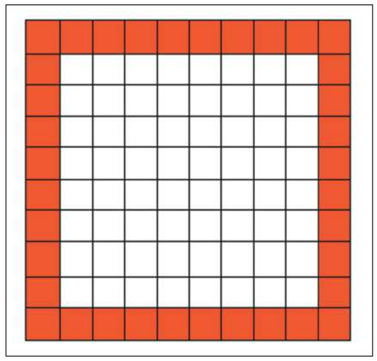


Augmentation du degré de difficulté – du raisonnement récursif à la formule

						
	Gold Square Toothpick Sequence		Blue Square Toothpick Sequence		Sierpinski Triangle Sequence	
Term Number	Area	Perimeter	Number of Toothpicks	Perimeter	Number of Orange Triangles	Triangle Side Length
1	1	4	4	4	1	1
2	2	8	7	6	3	1/2
3	3	12	10	8	9	1/4
4	4	16	13	10	27	1/8
10	10	40	31	22	3^9	$1/2^9$
n recursive formula	$a_n = a_{n-1} + 1$	$a_n = a_{n-1} + 4$	$a_n = a_{n-1} + 3$	$a_n = a_{n-1} + 2$	$a_n = 3a_{n-1}$	$a_n = (1/2)a_{n-1}$
n explicit formula	$a_n = n$	$a_n = 4n$	$a_n = 3n + 1$	$a_n = 2n + 2$	$a_n = 3^{n-1}$	$a_n = 1/2^{n-1}$

The Border problem

Determine the number of red border tiles in this 10 × 10 square without pointing to the tiles or counting them one by one.



Changing size of the square.

Changing level of abstraction

Next, look at a square of any size to help students transition from generalizing about specific (numerical) cases to generalizing about any case.

Changing Dimensions

Change the investigation from two to three dimensions. Instead of exploring the number of border squares for a two-dimensional square, investigate the number of cubes in the outer shell of a three dimensional cube

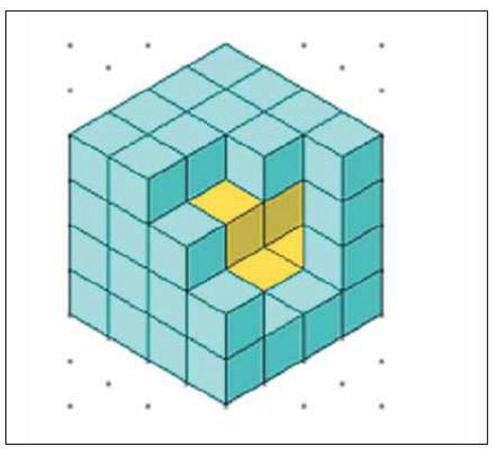


Fig. 6 Students count the cubes in the outer shell of a cube.

In the process of generalizing, two questions are useful:

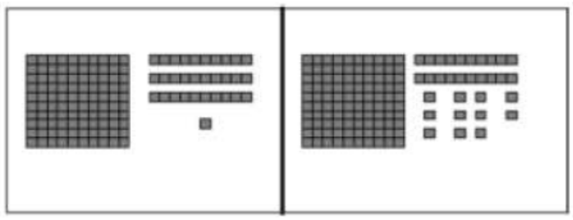
What is the same? & What is different, and how is it changing?

ANNEXE K
OPÉRER SUR L'INCONNUE

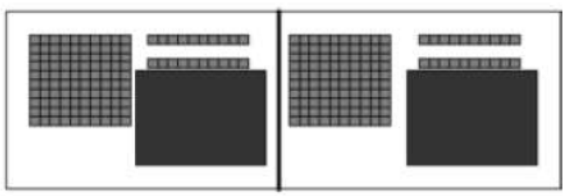
selon Squalli, 2007b, p.3-7

- **<u>Reconnaître que deux quantités sont équivalentes</u>**
- **<u>Reconnaître que l'équivalence de deux quantités est conservée par certaines transformations</u>**
- **<u>Trouver la transformation pour rendre une quantité équivalente à une quantité donnée</u>**

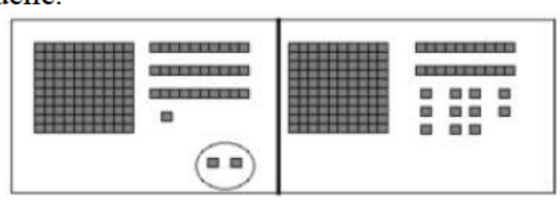
Situation 1 : Une quantité est représentée de deux manières différentes, mais équivalentes à l'aide des blocs de numération. Questions à poser : a-t-on autant de petits cubes à gauche qu'à droite ? […] s'assurer que l'enfant comprend bien que les deux quantités sont équivalentes.



Situation 2 : On cache un même nombre de cubes de part et d'autre. Question à poser : A-t-on autant de cubes cachés à gauche qu'à droite ? Pourquoi ? […] Comme prolongement de cette situation, l'enseignante ou l'enseignant peut cacher deux quantités différentes et reposer la même question

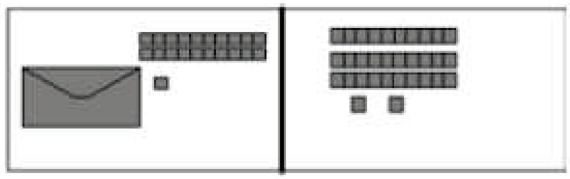


Situation 3 : Deux petits cubes ont été ajoutés dans la partie de gauche. Question à poser : Combien devrait-on ajouter de petits cubes dans la partie de droite pour avoir la même quantité des deux côtés ? […] Certains enfants diront que puisqu'au départ on avait le même nombre de petits cubes à droite et à gauche et qu'on en a ajouté deux à gauche, il faut faire la même chose à droite, en ajouter 2, pour qu'on ait une autre fois le même nombre de petits cubes à droite et à gauche. On reconnaîtra la transformation d'al-jabr[4] dans sa version contextuelle.

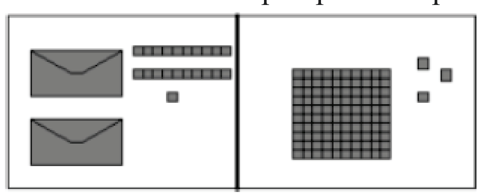


[4] Origine du mot algèbre, le terme arabe *al-jabr* apparût pour la première fois dans le célèbre ouvrage *Le livre concis d'al-jabr et d'al-muqàbala* d'al-Khawarizmi, entre 813 et 833. *Al-jabr*, signifie remise en place des os, réparation, remplissage, raboutage : c'est ainsi de façon imagée, qu'est désignée l'opération qui, sur une équation, consiste à ajouter un même terme à ses deux membres. La métaphore serait la suivante : si l'on ajoute un terme à un membre d'une égalité, on *casse* cette équation et il faut donc effectuer l'opération d'al-jabr pour rétablir l'état initial de l'équation en ajoutant le même terme à l'autre membre de l'égalité.

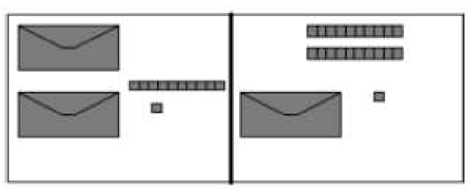
Situation 4 : Question à poser : On a caché certains petits cubes à gauche. On a le même nombre de petits cubes à gauche et à droite. Combien de petits cubes sont cachés à gauche ? […] Raisonnement basé sur le comptage […] la comptine à partir de 22 jusqu'à 32 […] Raisonnement basé sur le recouvrement […] 32 petits cubes recouvrent 21 petits cubes […] complément de 21 par rapport à 32, soit 11 […] Raisonnement basé sur une transformation algébrique […] la transformation d'al-muqabala[5], élimination de deux dizaines et de l'unité à gauche et à droite, pour isoler l'inconnue à gauche.



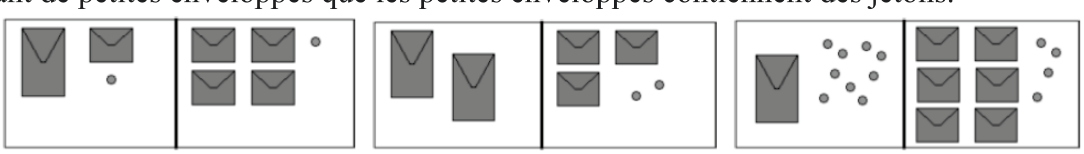
Situation 5 : On présente la situation suivante. Dans chaque enveloppe il y a un même nombre de petits cubes. Il y a autant de petits cubes à droite qu'à gauche. Question à poser : Combien de petits cubes se trouvent dans une enveloppe ? […] À cause de la double occurrence de l'inconnue, cette situation est un peu plus complexe que la précédente.



Situation 6 : On présente la situation suivante. Dans chaque enveloppe il y a un même nombre de petits cubes. Il y a autant de petits cubes à droite qu'à gauche. Question à poser : Combien de petits cubes se trouvent dans une enveloppe ? […] L'objectif est d'amener les élèves à considérer ce qui est inconnu et à opérer sur l'inconnue comme ils ont l'habitude d'opérer sur les quantités connues.



Situation 7 : Question à poser : sachant qu'il y a autant de jetons à gauche qu'à droite, combien une petite enveloppe contient de jetons ? Les grandes enveloppes contiennent autant de petites enveloppes que les petites enveloppes contiennent des jetons.



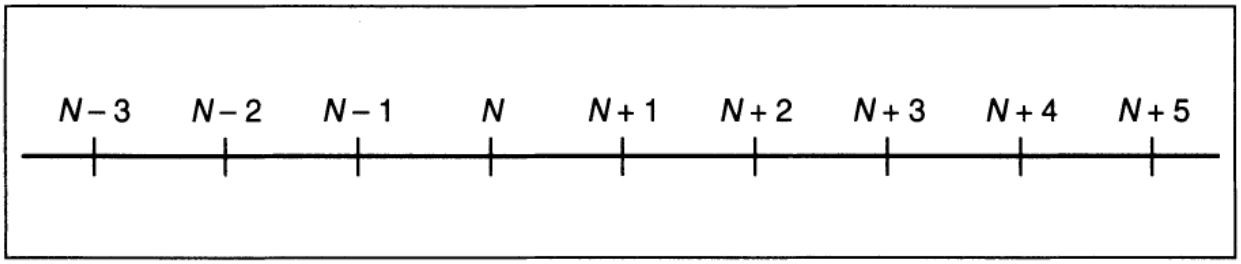
[5] *Al-muqàbala* signifie confrontation, mise en opposition et consiste à simplifier l'équation en éliminant les termes semblables qui se « confrontent » de part et d'autre du signe égalité (Baruk, 1992, p. 68).

ANNEXE L
OPÉRER SUR L'INCONNUE

selon Carraher & al. , 2006, p.95-108

The piggy bank problem

L'élève doit trouver la somme initiale que possédaient Mary et John le dimanche.



« *the variable number line* »

Mary and John each have a piggy bank.

On Sunday they both had the same amount in their piggy banks.

On Monday, their grandmother comes to visit them and gives 3 dollars to each of them.

On Tuesday, they go together to the bookstore. Mary spends $3 on Harry Potter's new book. John spends $5 on a 2001 calendar with dog's pictures on it.

On Wednesday, John washes his neighbor's car and makes $4. Mary also made $4 babysitting. They run to put their money in their piggy banks.

On Thursday Mary opens her piggy bank and finds that she has $9.

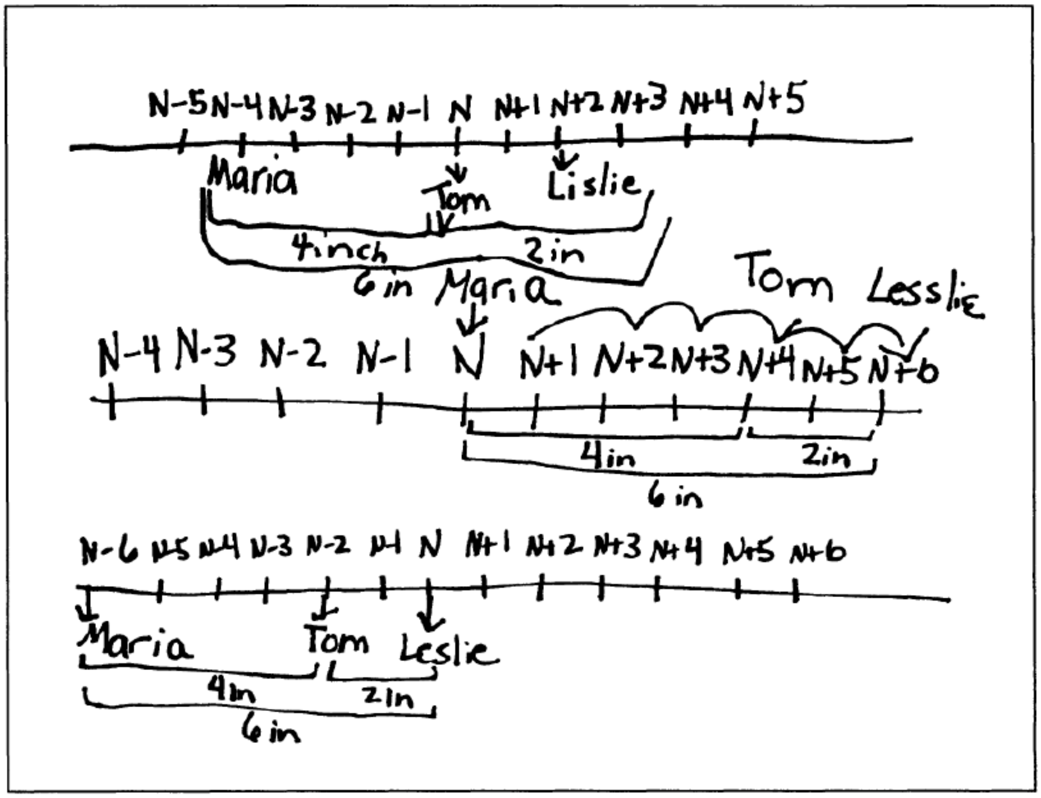
We initially displayed the problem in its entirety, so that the students could understand that it consisted of a number of parts. But then we covered up all days excepting Sunday. After reading what happened each day, students worked alone or in pairs, trying to represent on paper what was described in the problem […] The children themselves propose using N to represent an unknown quantity.

The heights problem

Tom is 4 inches taller than Maria. (il faut expliquer à quoi réfèrent les nombres 4 et 6)

Maria is 6 inches shorter than Leslie.

Draw Tom's height, Maria's height, and Leslie's height.



En réfléchissant au sens des nombres 4 et 6, les élèves opèrent sur l'inconnue comme si elle était connue et ils expriment leur réponse sous forme de fonction. Par exemple dans le premier cas la grandeur de Tom est N, la grandeur de Maria est N-4 et la grandeur de Leslie est N+2.